

Chapitre 2

Probabilité et échantillonnage

I. Expérience aléatoire

1) Vocabulaire

🔗 Exemple :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

💬 Définitions

- Une **expérience** (lancer un dé par exemple) est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** (1 ou 3 par exemple) et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.
- L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'**univers** (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

2) Réalisation d'une expérience aléatoire

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

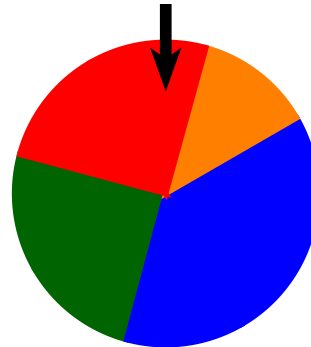
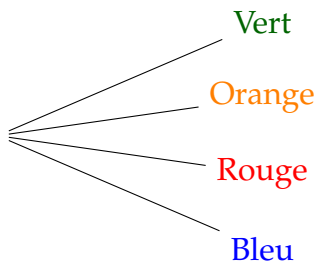
Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.

Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, ... ou un 6. En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

II. Probabilité d'un événement

1) Arbre des possibles

🔗 **Exemple :** Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibles :



🗨️ Définition

L'**arbre des possibles** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

2) Probabilité

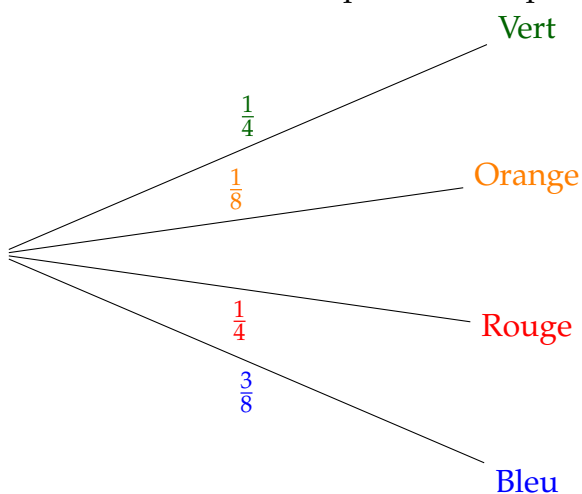
🗨️ Définition

Les fréquences obtenues d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (**Loi des grands nombres**). Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement E .

🔗 **Exemple :** 2 secteurs sur 8 sont de couleur verte. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur verte.

On dit que la probabilité d'obtenir un secteur vert est égale à $\frac{2}{8}$ soit $\frac{1}{4}$.

On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



3) Événement

Exemple : Soit l'événement E « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ». On pourrait se demander qu'elle est la probabilité que cet événement se réalise ?

Pour cela, on regarde dans l'arbre des possibles, la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur rouge et la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur bleu et on les additionne. E se réalise : $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

On dit que la probabilité que l'événement E se réalise est égale à $\frac{5}{8}$ et on note : $P(E) = \frac{5}{8}$.

🗨️ Définitions

- Un **événement** est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple, « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un événement. « La roue s'arrête sur un secteur vert » est un événement élémentaire.

☰ Méthode - Dénombrer pour calculer une probabilité

Énoncé : On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit E l'événement : « On tire un as ».

Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

Réponse :

Il y a 32 issues possibles car il existe 32 façons différentes de tirer une carte.

L'événement E possède 4 issues possibles : As de coeur, as de carreau, as de trèfle et as de pique.

La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à : $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

☰ Méthode - Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles

Énoncé : On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

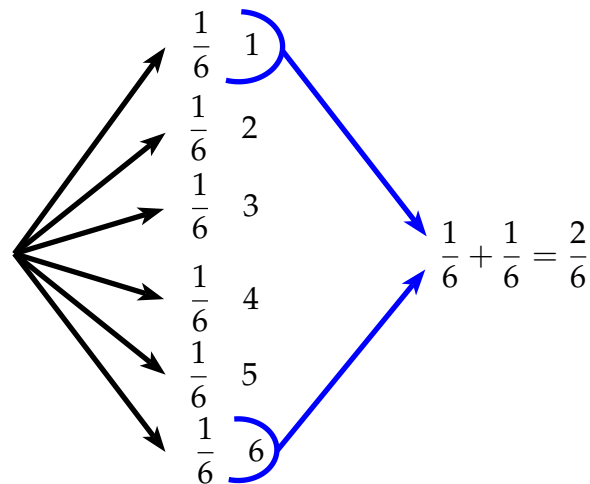
Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

Réponse :

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :

Chaque issue a la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, ... ou un 6.

On dit qu'il y a équiprobabilité.



Ainsi $P(E) = \frac{1}{3}$

La probabilité que l'événement E se réalise est de $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

Propriété

- 1) La probabilité $P(E)$ d'un événement E est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$.
- 2) La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- 3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Définition

L'ensemble des probabilités de ces événements élémentaires constitue ce qu'on appelle la **loi de probabilité**.

4) Événement contraire

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

Alors l'événement contraire de E est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet événement est noté \bar{E} .

Propriété

La probabilité de l'événement contraire d'un événement E est : $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

5) Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

☰ Méthode - Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

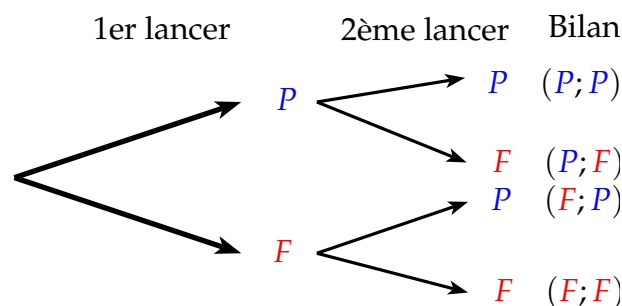
Énoncé : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.

Soit E l'événement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »

Calculer $P(E)$ en utilisant un arbre des possibles.

Réponse :

On construit un arbre des possibles présentant les résultats possibles aux deux épreuves de l'expérience. Le 1^{er} niveau de l'arbre correspond aux issues du 1^{er} lancer (1^{ère} épreuve). Le 2^e niveau de l'arbre correspond les issues du 2^e lancer (2^e épreuve).



On compte 4 issues en tout : $(P;P)$, $(P;F)$, $(F;P)$ et $(F;F)$.

L'événement E possède 3 issues : $(P;P)$, $(P;F)$ et $(F;P)$.

La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « PILE » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

III. Réunion et intersection de deux événements

1) Définitions

☞ **Exemple :** On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.

On considère les événements suivants :

A : « On tire un valet » B : « On tire un coeur ou un carreau »

L'intersection des événements A et B est l'événement :

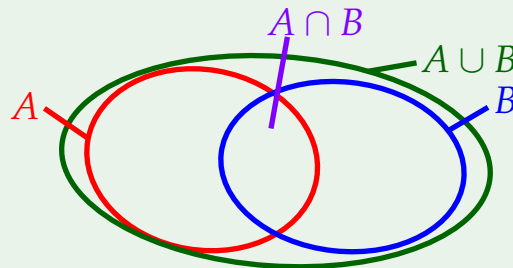
« On tire le valet de coeur ou le valet de carreau ». On note cet événement $A \cap B$ et on lit « A inter B ».

La réunion des événements A et B est l'événement :

« On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un coeur ou un carreau ». On note cet événement $A \cup B$ et on lit « A union B ».

🗨 Définitions

- L'événement « *A et B* », noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements *A* et *B* sont simultanément réalisés.
- L'événement « *A ou B* », noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



2) Probabilité d'une réunion

Théorème

Si *A* et *B* sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

☰ Méthode - Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

Énoncé : On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

On considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair » et *B* : « On obtient un multiple de 3 ».

Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

Réponse :

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$A \cap B$ est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc : $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

L'événement $A \cup B$ a donc pour probabilité :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3) Événements incompatibles

Définition

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

🔗 **Exemple** : On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.

On considère les événements suivants :

A : « On tire un valet » et B : « On tire un roi ».

Les deux événements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$. On en déduit que la probabilité de l'événement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$