Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

I. Intervalles de $\mathbb{R}$

1) Définition d'un intervalle

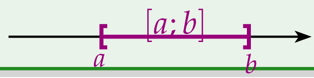
Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$:

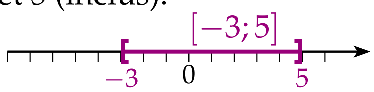
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'**intervalle** $[\ a\ ;\ b\ ]$.

Il contient tous les nombres compris entre a (inclus) et b (inclus).

On peut le représenter sur la droite réelle.



Exemple : l'intervalle $[\ -3\ ;\ 5\ ]$ contient tous les nombres compris entre -3 (inclus) et 5 (inclus).



Donc $1 \in [-3;5]$ $\quad -1 \in [-3;5]$ $\quad 12 \notin [-3;5]$ $\quad -5 \notin [-3;5]$ $\quad 5 \in [-3;5]$

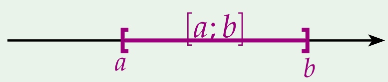
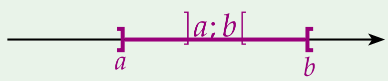
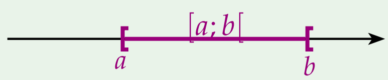
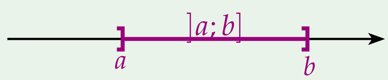
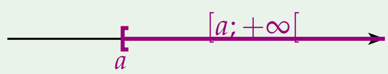
Remarque On utilise les symboles $\in$ "appartient" et $\notin$ "n'appartient pas".

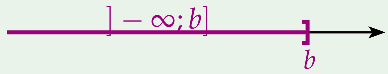
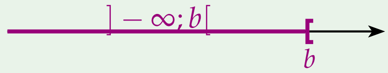
2) Différents types d'intervalles

Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$:

L'ensemble des réels x tels que :

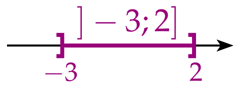
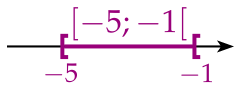
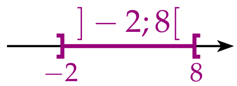
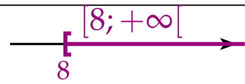
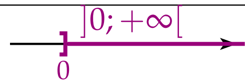
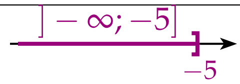
$a \leqslant x \leqslant b$	est l'intervalle	$[a;b]$	
$a < x < b$	est l'intervalle	$]a;b[$	
$a \leqslant x < b$	est l'intervalle	$[a;b[$	
$a < x \leqslant b$	est l'intervalle	$]a;b]$	
$a \leqslant x$	est l'intervalle	$[a;+\infty[$	
$a < x$	est l'intervalle	$]a;+\infty[$	

$x \leqslant b$	est l'intervalle	$]-\infty ; b]$	
$x < b$	est l'intervalle	$]-\infty ; b[$	

Remarques

- $+\infty$ se lit *"plus l'infini"* et $-\infty$ se lit *"moins l'infini"* ,
- l'intervalle $[\,a\,;\,b[$ est **fermé** en a (crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle) : $a \in [\,a\,;\,b[$, et est **ouvert** en b (crochet tourné vers l'extérieur de l'intervalle) : $b \notin [\,a\,;\,b[$,
- On écrit toujours $]-\infty$ et $+\infty[$ (intervalles ouverts).

Exemple :

Inégalité	Signification	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 5$	x est compris entre **2** (inclus) et **5** (inclus)	$x \in [2\,;\,5]$	
$-3 < x \leq 2$	x est compris entre **-3** (exclu) et **2** (inclus)	$x \in]-3\,;\,2]$	
$-5 \leq x < -1$	x est compris entre **-5** (inclus) et **-1** (exclu)	$x \in [-5\,;\,-1[$	
$-2 < x < 8$	x est compris entre **-2** (exclu) et **8** (exclu)	$x \in]-2\,;\,8[$	
$8 \leq x$	x est supérieur ou égal à **8**	$x \in [8\,;\,+\infty[$	
$x > 0$	x est strictement supérieur à **0**	$x \in]0\,;\,+\infty[$	
$x \leq -5$	x est inférieur ou égal à **-5**	$x \in]-\infty\,;\,-5]$	
$7 > x$	x est strictement inférieur à **7**	$x \in]-\infty\,;\,7[$	

Remarque Dans l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, le nombre $b-a$ s'appelle l'**amplitude** de l'intervalle.

3) Intersection et réunion d'intervalles

Définition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$,

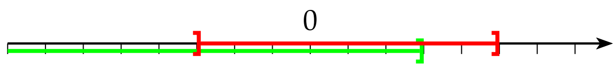
- **L'intersection** des intervalles I et J, notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent
  à la fois àl'intervalle I **et** à la fois à l'intervalle J (les deux en même temps)
- **La réunion** des intervalles I et J, notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I **soit** à l'intervalle J soit aux deux (l'un des deux ou les deux).

Remarques

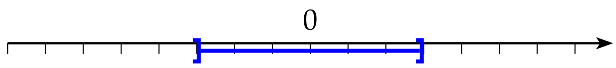
- $\cap$ se lit *inter*
- $\cup$ se lit *union*
- $x \in I \cap J$ se lit $x \in I$ **ET** $x \in J$
- $x \in I \cup J$ se lit $x \in I$ **OU** $x \in J$

Exemple :
Soient les intervalles $I =]-\infty; 3]$ et $J =]-3; 5]$, on veut déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

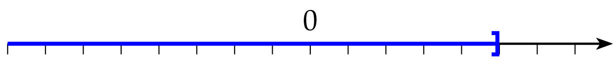
On représente I (en vert) et J (en rouge) sur la droite réelle :



- $I \cap J$ correspond à la partie de la droite colorée en vert **ET** en rouge
  $I \cap J =]\ -3\ ;\ 3\ ]$



- $I \cup J$ correspond à la partie de la droite colorée en vert **OU** en rouge,
  c'est à dire soit vert, soit rouge, soit les deux.
  $I \cup J =]\ -\infty\ ;\ 5\ ]$



Remarque $x \neq b$ signifie que x est soit strictement plus petit que b, soit strictement plus grand que b.
On écrit cet intervalle $]-\infty; b[\cap]b; +\infty[$

Exemple : L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ correspond à $x \neq 0$. Il peut s'écrire sous la forme d'une réunion d'intervalles $]\ -\infty\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ +\infty[$ ou encore $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

L'expression $\dfrac{4x+5}{x-7}$ est définie pour $x \in]\ -\infty\ ;\ 7\ [\ \cup\ ]\ 7\ ;\ +\infty[$

II. Vocabulaire et notation

Intro

Dans un salle de spectacle, l'achat d'un abonnement à 30 € permet d'avoir un tarif réduit sur les places de spectacle et de la payer 15 €.
Prix du spectacle pour :

- 2 places : $30 + 2 \times 15 = 60$ €
- 4 places : $30 + 4 \times 15 = 90$ €
- 10 places : $30 + 10 \times 15 = 180$ €
- x places : $30 + x \times 15 = 30 + 15x$ €

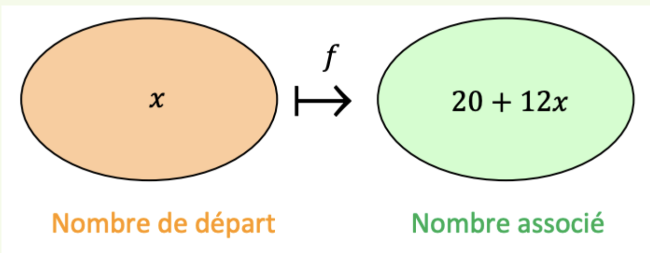
Pour un nombre de places donné, on fait correspondre le prix à payer.
Par exemple : $2 \mapsto 60$ $10 \mapsto 180$
De façon générale, pour x places, on note : $x \mapsto 30 + 15x$
$x \mapsto 30 + 15x$ se lit « à x, on associe $30 + 15x$ »
La correspondance qu'on a établie entre x et $30 + 15x$ peut porter un nom.

Vocabulaire

Vocabulaire et notations On va l'appeler f, et on note :

$$f : x \mapsto 30 + 15x$$

f est appelée une fonction. C'est une « *machine* » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



x est appelée la variable.
On note également :

$$f(x) = 30 + 15x$$

Remarque $f(x)$ se lit « *f de x* ».

Exemple : $f : 10 \mapsto 150$ peut donc s'écrire : $f(10) = 150$

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau qui s'appelle tableau de valeurs.

x	2	4	10
$f(x)$	60	90	180

Méthode - Résoudre un problème à l'aide d'une fonction

Enoncé : On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Enlever 4
- Multiplier par 3
- Ajouter 7

1) Appliquer le programme en prenant 5 comme nombre de départ.

2) On prend x comme nombre de départ.
Donner le résultat du programme en fonction de x.

3) On appelle f la fonction qui associe à x le résultat du programme.
Donner l'expression de la fonction f à l'aide des deux notations suivantes :
$f : x \mapsto \ldots\ f(x) = \cdots$

4) Compléter le tableau de valeurs :

x	5	8	12
$f(x)$			

réponse :

1) En prenant 5 au départ :

- 5
- $5-4=1$
- $3\times 1=3$
- $3+7=10$

En prenant 5 au départ, on obtient 10.

2) En prenant x au départ :

- x
- $x-4$
- $3\times(x-4)$
- $3\times(x-4)+7$

En prenant x au départ, on obtient $3(x-4)+7$.
On peut simplifier l'expression :

$$\begin{aligned}3\times(x-4)+7 &= 3\times x+3\times(-4)+7\\ &= 3x-12+7\\ &= 3x-5\end{aligned}$$

3) $f(x)=3x-5\ f : x \mapsto 3x-5$

4)

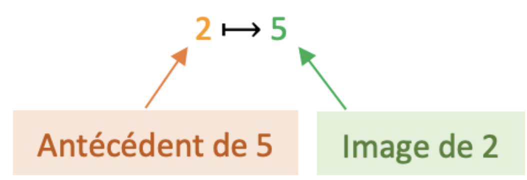
x	4	6	10
$f(x)$	7	11	19

$3\times 4-5$
$=12-5$
$=7$

III. Image, Antécédent

1) image et antécédent

Exemple : Dire que : $f(2)=5$ signifie que :



Vocabulaire

On dit que :

- l'image de 2 par la fonction f est 5.
- un antécédent de 5 par f est 2.

Méthode - Déterminer une image et un antécédent par une fonction

Enoncé :
Soit le tableau de valeurs suivant de la fonction f :

x	-4	6	10	18	20
$f(x)$	18	20	-4	38	18

Compléter alors :

1) L'image de -4 par f est ...
2) $f : \ldots \mapsto -4$
3) $f(20) = \cdots$
4) Un antécédent de 18 par f est ...

réponse :

1) L'image de -4 par f est 18, car $-4 \longmapsto 18$.
2) $f : 10 \mapsto -4$
3) $f(20) = 18$
4) Un antécédent de 18 par f est -4 ou 20, car $f(-4) = 18$ et $f(20) = 18$.

Remarques

- Un nombre peut posséder plusieurs antécédents.
  Par exemple : Ici, des antécédents de 18 sont -4 et 20 .
- Cependant, un nombre possède une unique image.

Méthode - Déterminer l'image d'une fonction par calcul

Enoncé :
Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g.

réponse :
$g(x) = x^2 - 2$
$g(6) = 6^2 - 2$
$g(6) = 36 - 2$
$g(6) = 34$
L'image de 6 par la fonction g est 34.

Méthode - Déterminer un antécédent par calcul

Enoncé :
Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f.

réponse :
On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.
On peut donc écrire : $f(x) = -5$
Soit : $2x - 3 = -5$
On résout ainsi l'équation :
$2x = 3 - 5$
$2x = -2$
$x = -1$
L'antécédent de -5 par f est donc -1.

2) Ensemble de définition

Définition

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f dont l'ensemble de départ est noté E et l'ensemble d'arrivée F est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image dans F par f, autrement dit l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

Attention

Les restrictions des domaines de définitions concernent les $\sqrt{\dots}$ et les $\dfrac{\dots}{\dots}$.

Autrement dit $\sqrt{A}$ existe ssi $A \geqslant 0$ et $\dfrac{A}{B}$ existe ssi $B \neq 0$.

Méthode - Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Enoncé :
Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ **2)** $g : x \longmapsto \dfrac{1}{2x}$ **3)** $h : x \longmapsto \dfrac{3x-2}{x+4}$

réponse :

1) Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$
$f(x)$ existe ssi $x+1 \geqslant 0$
ssi $x \geqslant -1$
donc $\mathrm{D}_f = [-1; +\infty[$

2) Soit $g : x \longmapsto \dfrac{1}{2x}$
$g(x)$ existe ssi $2x \neq 0$
ssi $x \neq 0$
donc $\mathrm{D}_g = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

3) Soit $h : x \longmapsto \dfrac{3x-2}{x+4}$
$h(x)$ existe ssi $x+4 \neq 0$
ssi $x \neq -4$
donc $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-4\}$

IV. Représentation graphique d'une fonction

1) Construction d'une courbe

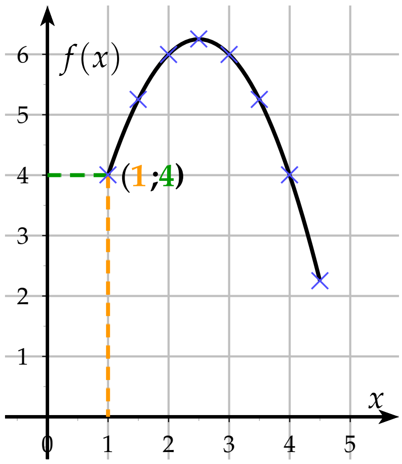
Méthode - Déterminer un antécédent par calcul

Enoncé :
Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f.
réponse :

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.
En reliant les points, on obtient une courbe.
Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.



Remarque Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$ peut se noter $y = 5x - x^2$.
De façon générale, l'équation d'une courbe se note $y = f(x)$.

Méthode - Vérifier si un point appartient à la courbe d'une fonction

Enoncé :
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$
Vérifier que le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe de f.

réponse :
Le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe si $f(-2) = 7$.
$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$
Donc le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe de f.

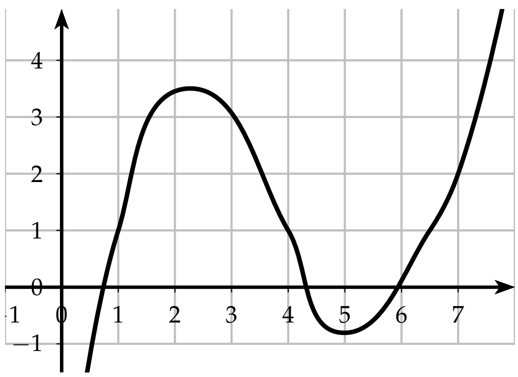
2) Lecture graphique d'une image et d'un antécédent

Méthode - Lire graphiquement une image et un antécédent

Enoncé :

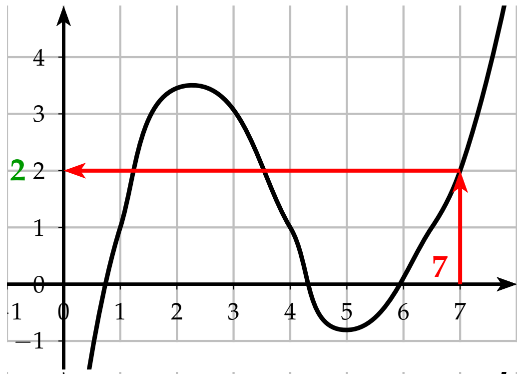
On considère la fonction f représentée ci-contre.
Déterminer graphiquement :

1) L'image de 7 par la fonction f.
2) Trois antécédents de 1 par la fonction f.

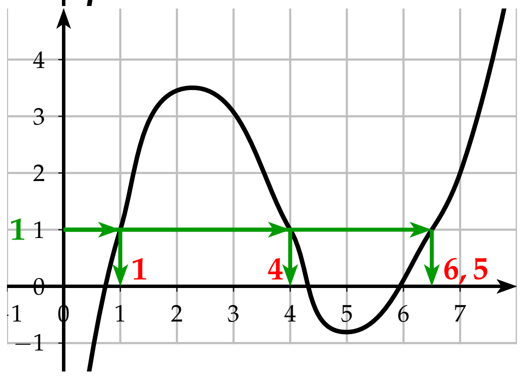


réponse :

1) Pour déterminer l'image de 7 , on « *part* » de l'abscisse 7, on « *rejoint* » la courbe et on lit la valeur correspondante sur l'axe des ordonnées.
On lit donc que l'image de 7 est 2.
On peut noter : $f(7) = 2$.



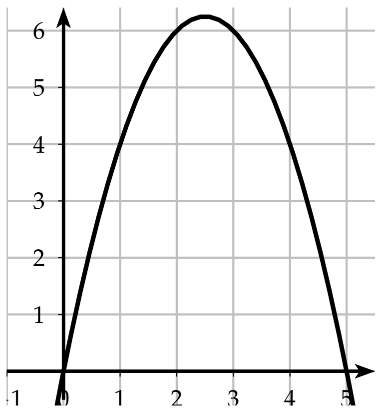
2) Pour déterminer des antécédents de 1 , on « *part* » de l'ordonnée 1 , on « *rejoint* » la courbe et on lit les valeurs correspondantes sur l'axe des abscisses. On lit donc que des antécédents de 1 sont 1, 4 et 6, 5.
On peut par exemple noter : $f(4) = 1$.



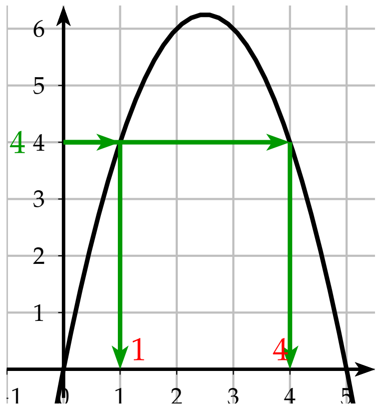
V. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode - Résoudre graphiquement une équation

Enoncé :
On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



réponse :
L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.
Ce qui revient à trouver des antécédents de 4 par la fonction f.
On « *part* » de l'ordonnée 4, on « *rejoint* » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.
On peut noter : $S = \{1;4\}$.



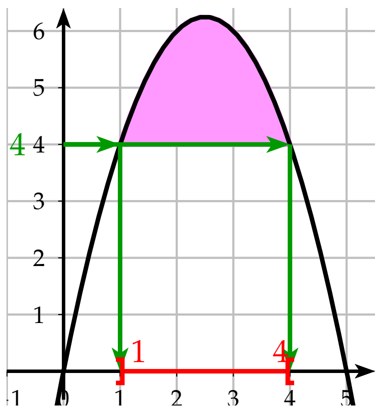
Remarques

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Méthode - Résoudre graphiquement une inéquation

Enoncé :
Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

réponse :
L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f(x) > 4$
Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4. On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :
x est strictement compris entre 1 et 4 .
On peut noter : $S =]1;4[$



Méthode - Résoudre une équation ou une inéquation du type : $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$

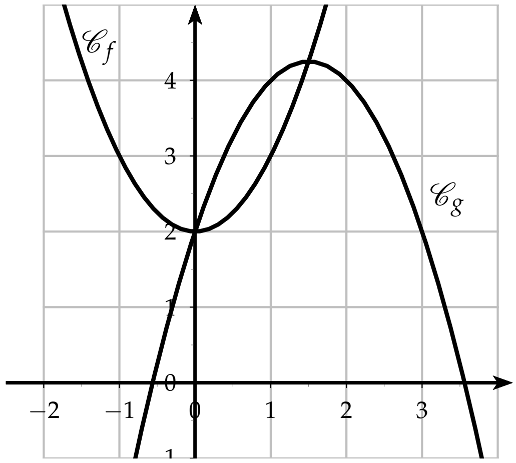
Enoncé :

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 2 \text{ et } g(x) = -x^2 + 3x + 2$$

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

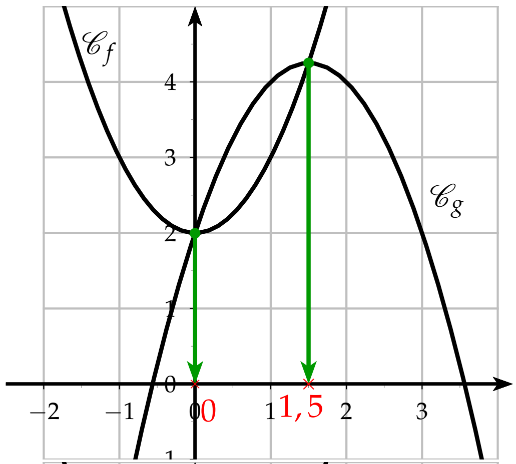
2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.



réponse :

1) $f(x) = g(x)$ lorsque les courbes se croisent.
Il suffit de lire l'abscisse des points d'intersection des deux courbes.

On lit les solutions sur l'axe des abscisses : 0 et 1,5.
On peut noter : $S = \{0; 1,5\}$.



2) $f(x) < g(x)$ lorsque la courbe de g se trouve au-dessus de la courbe de f.
On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses : l'intervalle $]0; 1,5[$.
On peut noter : $S =]0; 1,5[$.

Les valeurs 0 et 1,5 sont exclues de l'ensemble des solutions car dans l'inéquation $f(x) < g(x)$ l'inégalité est stricte.