

Chapitre 4

Vecteurs - partie 1

I. Définitions et propriété

1) Norme d'un vecteur

Définition

.....

.....

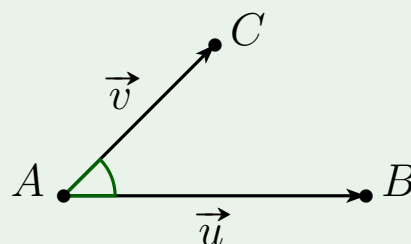
2) Produit scalaire

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

-
-



Remarques

- ☞ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit \vec{u} scalaire \vec{v}
- ☞ Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux représentants des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$
- ☞ **Attention** : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

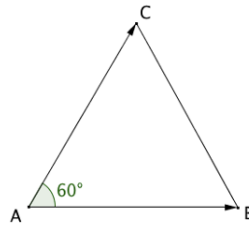
Méthode - calculer un produit scalaire

Énoncé : Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sachant que $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Énoncé :

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a . Calculer, en fonction de a , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété

Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a :

Démonstration

4) opérations sur les produits scalaires

Propriété

Pour tout vecteur \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} , on a :

1)

2)

5) Identités remarquables

Propriété

Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a :

1)

2)

3)

Démonstration - 2ème formule :

II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété

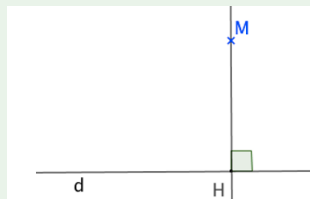
.....

Démonstration

2) Projection orthogonale

Définition

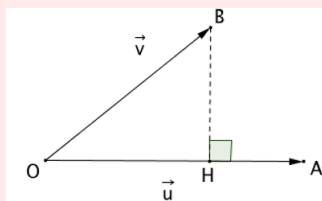
.....



Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA). On a

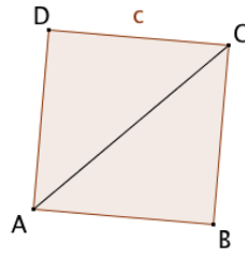


Démonstration

Méthode - Calculer un produit scalaire par projection

Énoncé :

Soit un carré ABCD de côté c . Calculer, en fonction de c , les produits scalaires :



1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

2) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

3) $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$

Réponse :

III. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

Démonstration

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Énoncé :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Réponse :

Méthode - Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Énoncé :

Calculer la mesure de l'angle $(\vec{AB}; \vec{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.

Réponse :

