

Correction - DS n°3

Équations du second degré - Sujet B

Exercice 1 - Equations - (1,5 points)

Déterminer les racines des fonctions polynômes du second degré.

1) $f(x) = 4(x+6)(-x+12)$ (0,5)

$$x+6=0 \text{ et } -x+12=0 \iff x_1 = -6 \text{ et } x_2 = 12$$

$$x=0 \text{ et } x-54=0 \iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 54$$

2) $g(x) = 2x(x-54)$ (0,5)

3) $h(x) = -8(x+8)(x-425)$ (0,5)

$$x+8=0 \text{ et } x-425=0 \iff x_1 = -8 \text{ et } x_2 = 425$$

Exercice 2 - Factorisation - (5,5 points)

Donner les racines du polynôme du second degré donné, puis le factoriser

1) $A(x) = x^2 - 8x + 16$ (1)

$$A(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$

(Identité remarquable)

3) $C(x) = x^2 + 15x + 26$ (1,5)

$$\Delta = 15^2 - 4 \times 26 = 121$$

$$x_1 = \frac{-15 - \sqrt{121}}{2} = -13$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-15 + \sqrt{121}}{2} = -2$$

$$C(x) = (x+13)(x+2)$$

2) $B(x) = -x^2 + 3x + 10$ (1,5)

$$\Delta = 9 + 4 \times 10 = 49$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times (-1)} = 5$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times (-1)} = -2$$

$$B(x) = -(x+2)(x-5)$$

4) $D(x) = 3x^2 - 5x + 12$ (1,5)

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 12 = -119$$

Pas de racines et factorisation impossible.

Exercice 3 - Inéquations - (5,5 points)

Résoudre les inéquations données.

1) $x^2 - 8x + 7 \leq 0$ (1,5)

$$\Delta = 36$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 7$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$S = [1; 7]$$

2) $3x^2 + 8x - 3 \leq 0$ (1,5)

$$\Delta = 100$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

$$S = \left[-3; \frac{1}{3}\right]$$

3) $25x^2 - 16 \geq 0$ (1,5)

$$\Leftrightarrow (5x - 4)(5x + 4) \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

$$S = \left] -\infty; -\frac{4}{5} \right] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty \right[$$

4) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4} > 0$ (1,5)

$$\Delta = 0 \text{ et } x_0 = \frac{1}{6} \text{ et } a > 0 \text{ donc}$$

$$S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

Exercice 4 - Tableau de variations - (2 points)

Pour la fonction polynôme du second degré ci-dessous, dresser son tableau de variations (les valeurs du tableau de variations doivent être justifiées).

$$f(x) = 5x^2 + 55x - 25$$

On a $a = 5 > 0$, $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{11}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{705}{4}$ donc :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{2}$	$+\infty$
f		↘	↗
		$-\frac{705}{4}$	

Exercice 5 - Somme et Produit de racines - (2 points)

Pour chaque équation, déterminer une solution évidente et en déduire l'autre sans calculer le discriminant.

1) $10x^2 + 2x - 8 = 0$ ①

2) $2x^2 - 18x + 28 = 0$ ①

$$1) x_1 = -1, \text{ d'ou } S = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

$$2) x_1 = 2, \text{ d'ou } S = -\frac{b}{a} = 9$$

$$x_2 = 9 - 2 = 7$$

Exercice 6 - Problème - (4 points)

Une athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$. La hauteur $h(t)$, en mètre, à l'instant t , en seconde, du centre de gravité est :

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2$$

La hauteur est mesurée à partir du sol.

- 1) À quel instant le javelot est-il au plus haut et quelle est la hauteur maximale? ①

On cherche α et β :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2 \times (-0,5)} = 8 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{1}{2} \times 8^2 + 8 \times 8 + 2 = 34$$

Au bout de 8 secondes, le javelot atteint une hauteur de 34m.

- 2) Pendant combien de temps le javelot est-il au-dessus de 32m? ②

$$\text{on résout l'inéquation : } h(t) \geq 32 \iff -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2 \geq 32 \iff -\frac{1}{2}t^2 + 8t - 30 \geq 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \times \frac{1}{2} \times 30 = 4$$

$$t_1 = \frac{-8 - \sqrt{4}}{2 \times (-0,5)} = 10$$

$$\text{et } t_2 = \frac{-8 + \sqrt{4}}{2 \times (-0,5)} = 6$$

Le javelot sera au-dessus de 32m pendant $x_1 - x_2 = 4$ secondes.

- 3) Au bout de combien de temps le javelot touchera-t-il le sol? (À quel instant le javelot touchera-t-il le sol?) ①

on résout l'équation $h(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2 = 0 \quad \Delta = 64 - 4 \times \frac{-1}{2} \times 2 = 68$$

$$t_1 = \frac{-8 - \sqrt{68}}{2 \times (-0,5)} = 8 - 2\sqrt{17} \approx -0,246$$

$$\text{et } t_2 = \frac{-8 + \sqrt{68}}{2 \times (-0,5)} = 8 + 2\sqrt{17} \approx 16,246$$

Le javelot touchera donc le sol au bout de 16,2 secondes environ.