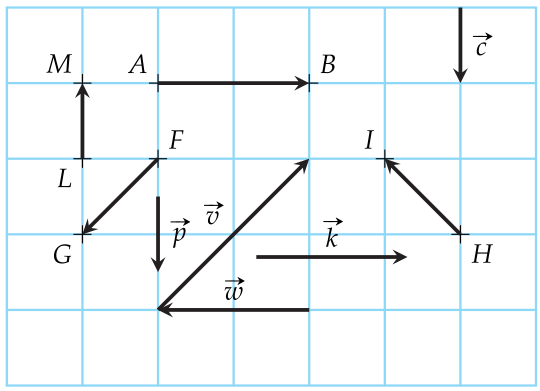
Chapitre 4

Correction - Exercices d'entrainement Notion de vecteur

I. Notion de vecteur

Exercice 1 (Vecteurs et translations)

On considère les vecteurs ci-contre représentés sur un quadrillage.



1) Repérer les vecteurs égaux, les vecteurs opposés et les vecteurs de même norme.

> Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{k}$ sont égaux. Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{c}$ le sont aussi.
> Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{k}$ sont opposés. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{AB}$ aussi. Ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\vec{p}$ et les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\vec{c}$.
> Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{FG}$ ont la même norme. Les vecteurs égaux et opposés précédemment cités ont aussi forcément la même norme.

2) Quelle est l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$?

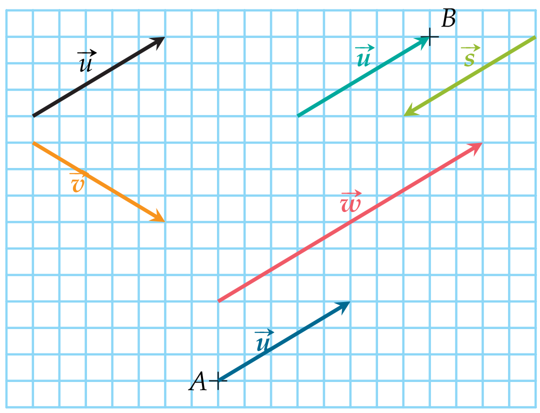
> L'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$ est A.

3) Par quelles translations le point A est-il l'image du point B ?

> A est l'image de B par la translation de vecteur $-\vec{k}$ (ou de vecteur $\vec{w}$).

Exercice 2 (Tracer des vecteurs)

Dans le quadrillage ci-contre :



1) Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine le point A.

2) Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour extrémité le point B.

3) Tracer un vecteur $\vec{v}$ de même longueur que $\vec{u}$ mais différent de $\vec{u}$.

4) Tracer un vecteur $\vec{w}$ de même direction, de même sens que $\vec{u}$, mais différents de $\vec{u}$.

5) Tracer un vecteur $\vec{s}$ de même direction et de même longueur que $\vec{u}$ mais différent de $\vec{u}$.

Exercice 3 (Vecteurs égaux et vecteurs opposés)

En utilisant le quadrillage, dire pour chaque égalité si elle est vraie ou si elle est fausse.

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ Vrai

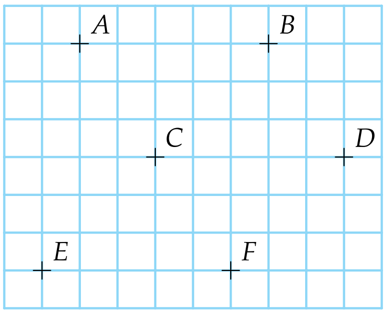
2) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ Faux

3) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ Faux

4) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$ Faux

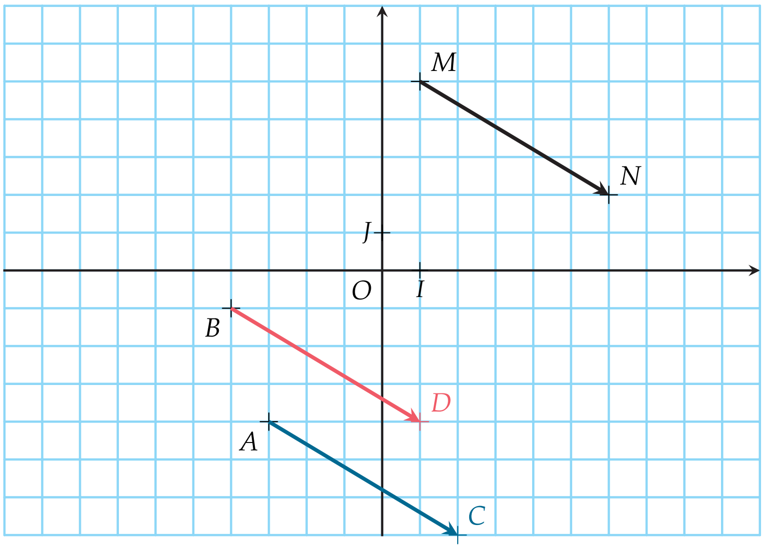
5) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ Vrai

6) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$ Vrai



II. Opérations sur les vecteurs

Exercice 4 (Règle du parallélogramme)



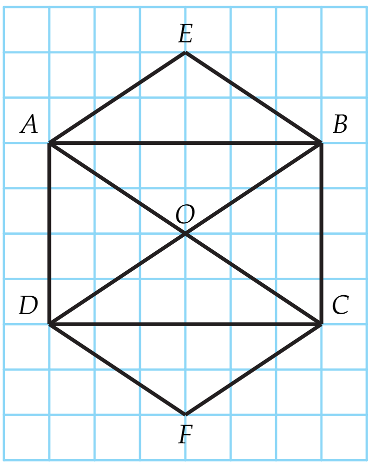
1) Tracer le point C image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$

2) Tracer le point D image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

3) Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$? Justifier votre réponse.

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MN}$ donc d'après la règle du parallélogramme ACDB est un parallélogramme.

Exercice 5 (Somme de vecteurs)



Calculer les sommes vectorielles indiquées en utilisant la figure ci-contre :

1) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$

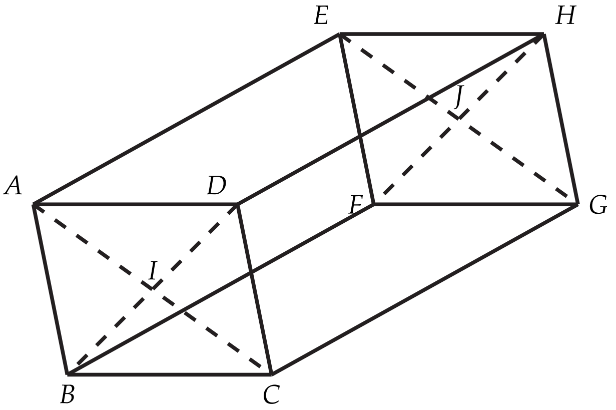
3) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$

4) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OF}$

5) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$

6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Exercice 6 (Somme de vecteurs et relation de Chasles)



Sur la figure ci-dessus, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer un représentant de :

1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}$
2) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AC}$
3) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{BC}$
4) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DH}$
5) $\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{BF}$
6) $\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{JI}$
7) $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{AI}$
8) $\overrightarrow{IF}-\overrightarrow{FJ}$
9) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FJ}$
10) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{BD}$
11) $\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{ID}$
12) $\overrightarrow{GJ}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BI}$
13) $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{FH}$
14) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FH}$

1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}$ $\boxed{=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}}$

2) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AC}$ $\boxed{=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EC}}$

3) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{BC}$ $\boxed{=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{HH}=\vec{0}}$

4) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DH}$ $\boxed{=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{DA}}$

5) $\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{BF}$ $\boxed{=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{IE}}$

6) $\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{JI}$ $\boxed{=\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{HI}}$

7) $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{AI}$ $\boxed{=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{FJ}}$

8) $\overrightarrow{IF}-\overrightarrow{FJ}$ $\boxed{=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{JF}=\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JF}=\overrightarrow{DF}}$

9) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FJ}$ $\boxed{=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JH}=\overrightarrow{AH}}$

10) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{BD}$ $\boxed{=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}}$

11) $\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{ID}$
$\boxed{=\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{II}=\vec{0}}$

12) $\overrightarrow{GJ}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BI}$ $\boxed{=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}}$

13) $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{FH}$
$\boxed{=\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IA}}$

14) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FH}$
$\boxed{=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{AF}}$

Exercice 7 (Somme de vecteurs et relation de Chasles sans schéma)

Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles :

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$ $\boxed{=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}}$

2) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$ $\boxed{=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}}$

3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ $\boxed{=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}}$

4) $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ $\boxed{=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}}$

5) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$ $\boxed{=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}}$

Exercice 8 (Multiplication par un réel)

Les point A, BC, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$

1) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AE}$ $\boxed{\vec{v}=-3\vec{u}}$

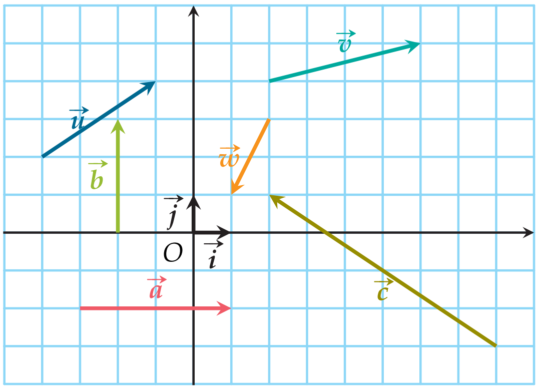
2) $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AE}$ $\boxed{\vec{v}=\frac{2}{5}\vec{u}}$

3) $\vec{v}=\overrightarrow{EC}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ $\boxed{\vec{v}=\vec{u}}$

4) $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ $\boxed{\vec{v}=-\frac{3}{2}\vec{u}}$

III. Coordonnées de vecteurs

Exercice 9



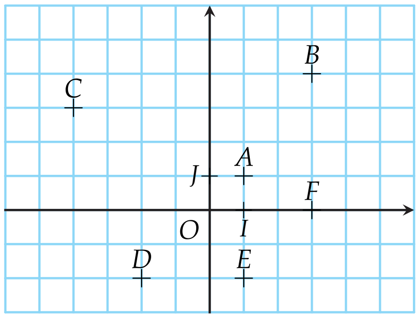
Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ dans ce repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$\vec{a}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $\vec{c}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 10

Lire les coordonnées des vecteurs suivants.



1) $\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{AC}$
3) $\overrightarrow{CA}$
4) $\overrightarrow{DE}$
5) $\overrightarrow{AE}$
6) $\overrightarrow{AF}$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ **3)** $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ **5)** $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ **4)** $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ **6)** $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

IV. Calcul des coordonnées de vecteurs

Exercice 11

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $E(-4;3)$, $F(2;-5)$, $G(-4;1)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EG}$

On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}x_F - x_E\\y_F - y_E\end{pmatrix}$, c'est à dire $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2-(-4)\\-5-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$, De même on obtient $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

2) Retrouver les coordonnées de $M(x;y)$ telles que $\overrightarrow{EM} = \vec{u}$.

On recherche $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{EM} = \vec{u}$. En passant aux coordonnées on obtient l'égalité suivante : $\begin{pmatrix}x-(-4)\\y-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. Au final on obtient alors $M(1;0)$.

Exercice 12

On considère quatre points $F(4;-2)$, $G(-2;5)$, $H(3;-4)$ et $K(7;-5)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{KF}$.

$x_{\overrightarrow{FG}} = x_G - x_F = -2 - 4 = -6$ et $y_{\overrightarrow{FG}} = y_G - y_F = 5 + 2 = 7$ donc $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-6\\7\end{pmatrix}$.

$x_{\overrightarrow{GH}} = x_H - x_G = 3+2 = 5$ et $y_{\overrightarrow{GH}} = y_H - y_G = -4-5 = -9$ donc $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$.

$x_{\overrightarrow{HK}} = x_K - x_H = 7-3 = 4$ et $y_{\overrightarrow{HK}} = y_K - y_H = -5+4 = -1$ donc $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

Et enfin $x_{\overrightarrow{KF}} = x_F - x_K = 4-7 = -3$ et $y_{\overrightarrow{KF}} = y_F - y_K = -2+5 = 3$ donc $\overrightarrow{KF}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$

2) Déterminer de deux façons différentes les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}$.

1re méthode :
$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH}$ et on a $x_{\overrightarrow{FH}} = x_H - x_F = 3-4 = -1$ et $y_{\overrightarrow{FH}} = y_H - y_F = -4+2 = -2$.

On obtient $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

2ème méthode :

$x_{\overrightarrow{FG}} + x_{\overrightarrow{GH}} = -6+5 = -1$ et $y_{\overrightarrow{FG}} + y_{\overrightarrow{GH}} = 7-9 = -2$. On obtient les coordonnées $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 13

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{9}\right)$ et $B\left(1;-\frac{8}{9}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_b-y_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-\frac{2}{3}\\-\frac{8}{9}-\frac{1}{9}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

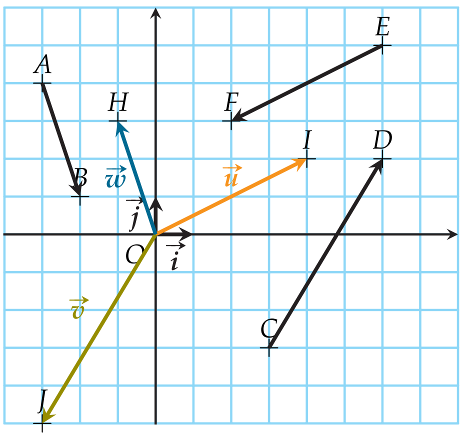
2) $A(-0,6;1,1)$ et $B(0,6;0,7)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_b-y_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0,6-(-0,6)\\0,7-1,1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1,2\\-0,4\end{pmatrix}$$

V. Opérations sur les vecteurs

Exercice 14

On considère les points et les vecteurs suivants dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



1) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ telles que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. Construire le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x_{AB}+x_{CD}\\y_{AB}+y_{CD}\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}1+3\\-3+5\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

2) Calculer les coordonnées de $\vec{v}$ telles que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$. Construire le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} x_{AB}+x_{EF} \\ y_{AB}+y_{EF} \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} 1+(-4) \\ -3+(-2) \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

3) Calculer les coordonnées de $\vec{w}$ telles que $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}$. Construire le point H tel que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}$.

$\vec{w}\begin{pmatrix} x_{CD}+x_{EF} \\ y_{CD}+y_{EF} \end{pmatrix} = \vec{w}\begin{pmatrix} 3+(-4) \\ 5+(-2) \end{pmatrix} = \vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 15

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Calculer les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}$, $-5\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$ et $-\frac{2}{3}\vec{u}$.

$2\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\quad -5\vec{u}\begin{pmatrix} -25 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{4}{2} \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{2}{3}\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées $(1;4)$, $(4;6)$ et $(2;3)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

Pour que ABCD soit un parallélogramme on doit avoir $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D-2 \\ y_D-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \iff x_D - 2 = -3$ et $y_D - 3 = -2$.
Donc $D(-1;1)$.

2) Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

On prouve que 2 côtés consécutifs ont la même longueur.
$AB = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ et $BC = \sqrt{(2-4)^2+(3-6)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ On a donc AB=BC. Le parallélogramme ABCD est donc aussi un losange.