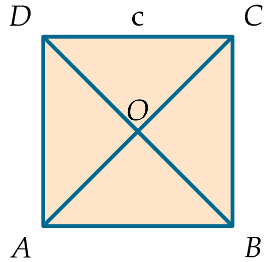
Produit scalaire - Projection orthogonale
Correction - Exercices d'entrainement

Exercice 1

On considère un carré ABCD de centre O et de côté c. Calculer les produits scalaires suivants.



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
4) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$
5) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$
6) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$
7) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC}$

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2$ par projection orthogonale du point C sur le segment $[AB]$.

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{c^2}{2}$ par projection orthogonale du point O sur le segment $[AB]$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -c^2$

4) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$

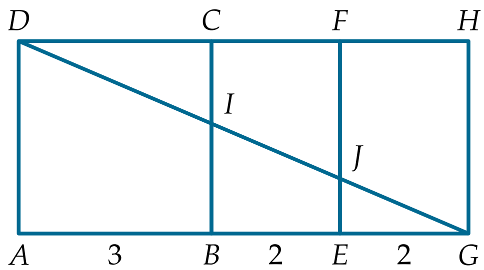
5) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2$ par projection orthogonale du point D sur le segment $[AB]$

6) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}c)^2 = -c^2$

7) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ car les 2 vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 2

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3 , accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.
En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$
3) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG}$
4) $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD}$
5) $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG}$
6) $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

1) On projette le vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 = 9$

2) On projette le vecteur $\overrightarrow{BF}$ sur le vecteur $\overrightarrow{BE}$:
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = -3 \times 2 = -6$

3) On projette le vecteur $\overrightarrow{EI}$ sur le vecteur $\overrightarrow{EB}$:
$\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AG} = -2 \times 7 = -14$

4) On projette le vecteur $\overrightarrow{GD}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HD}$:
$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{HD} = -2 \times 7 = -14$

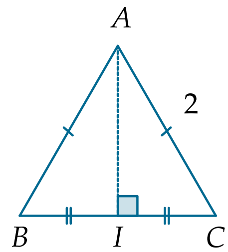
5) Les droites (BC) et (GH) sont parallèles donc on projette le vecteur $\overrightarrow{IC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HG}$.
Pour calculer la longueur IC, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle GHD
$\frac{IC}{GH} = \frac{DC}{DH}$, donc $IC = \frac{DC \times GH}{DH} = \frac{3 \times 3}{7} = \frac{9}{7}$
Alors $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG} = -\frac{9}{7} \times 3 = -\frac{27}{7}$

6) Pour calculer la longueur EJ, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle AGD

$\dfrac{EJ}{AD} = \dfrac{GE}{GA}$, donc $EJ = \dfrac{GE \times AD}{GA} = \dfrac{2 \times 3}{7} = \dfrac{6}{7}$
On projette le vecteur $\overrightarrow{FA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{FE}$:
$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FE} = -\dfrac{6}{7} \times 3 = -\dfrac{18}{7}$

Exercice 3

Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.



1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **2)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$ **3)** $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$

Avec le projeté orthogonal

1) On projette $\overrightarrow{BA}$ sur (BC)
Alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BI}\| = 2 \times 1 = 2$

2) On projette $\overrightarrow{BA}$ sur (BI)
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI} = \|\overrightarrow{BI}\| \times \|\overrightarrow{BI}\| = 1 \times 1 = 1$

3) On projette $\overrightarrow{AC}$ sur (AI)
Pour trouver la longueur du segment $[AI]$, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AIC :
$AC^2 = AI^2 + CI^2$, donc $AI^2 = AC^2 - CI^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ et enfin $AI = \sqrt{3}$ cm. On obtient alors :
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AI}\| = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

Avec la définition

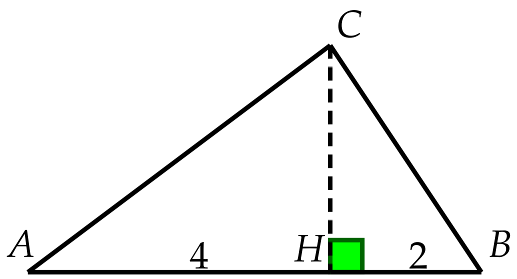
1) ABC est un triangle équilatéral, donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}$.
Alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 2$

2) I étant le pied de la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC, il est également le milieu du segment $[BC]$, donc $BI = 1$ cm.
De plus, la symétrie du produit scalaire implique que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ et comme $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}$, on obtient :
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BI}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

3) La droite (AI) est également la bissectrice du sommet A du triangle ABC, donc $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{6}$.
Pour trouver la longueur du segment $[AI]$, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AIC :
$AC^2 = AI^2 + CI^2$, donc $AI^2 = AC^2 - CI^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ et enfin $AI = \sqrt{3}$ cm. On obtient alors :
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

Exercice 4

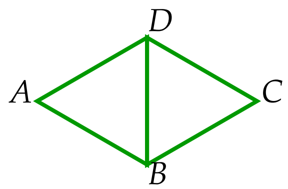
Dans le cas ci-dessous, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide des informations données.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 6 \times 4 = 24$

Exercice 5
ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux de côté 4. Calculer les produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$
4) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$
5) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$
6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 16 \times \frac{-1}{2} = -8$

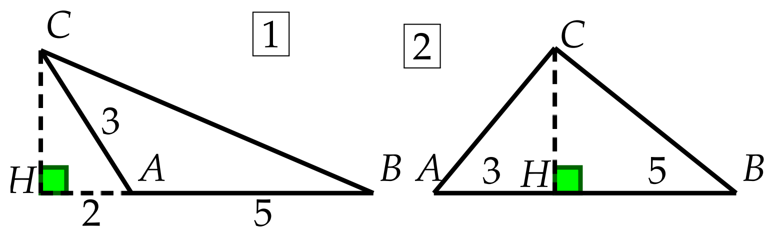
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) = -\frac{1}{2}DB \times DB = -\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = -8$

4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ car $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux (les diagonales d'un losange se coupent $\perp$).

5) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -AD \times AD = -4 \times 4 = -16$

6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}AC \times AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{12} \times 2\sqrt{12} = 24$

Exercice 6 Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -5 \times 2 = -10$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 8 \times 3 = 24$