

## Chapitre 2

# Probabilités conditionnelles et indépendance

## I. Probabilité conditionnelle

### 🗨 Définition

Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) \neq 0$ .

On appelle probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$ , la probabilité que l'événement  $B$  se réalise sachant que l'événement  $A$  est réalisé. Elle est notée  $P_A(B)$  et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

### 🔗 Exemples :

- 1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit  $A$  l'événement « Le résultat est un pique ».

Soit  $B$  l'événement « Le résultat est un roi ».

Donc  $A \cap B$  est l'événement « Le résultat est le roi de pique ».

$$\text{Alors : } P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}.$$

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

- 2) Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit « Gagné » ou soit « Perdu ».

Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.

Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.

On tire au hasard une boule dans le sac.

Soit  $R$  l'événement « On tire une boule rouge ».

Soit  $G$  l'événement « On tire une boule marquée Gagné ».

Donc  $R \cap G$  est l'événement « On tire une boule rouge marquée Gagné ».

$$\text{Alors : } P(R) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ et } P(R \cap G) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :

$$P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

**Remarque** La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilités simples. On a en particulier :

**Propriété**

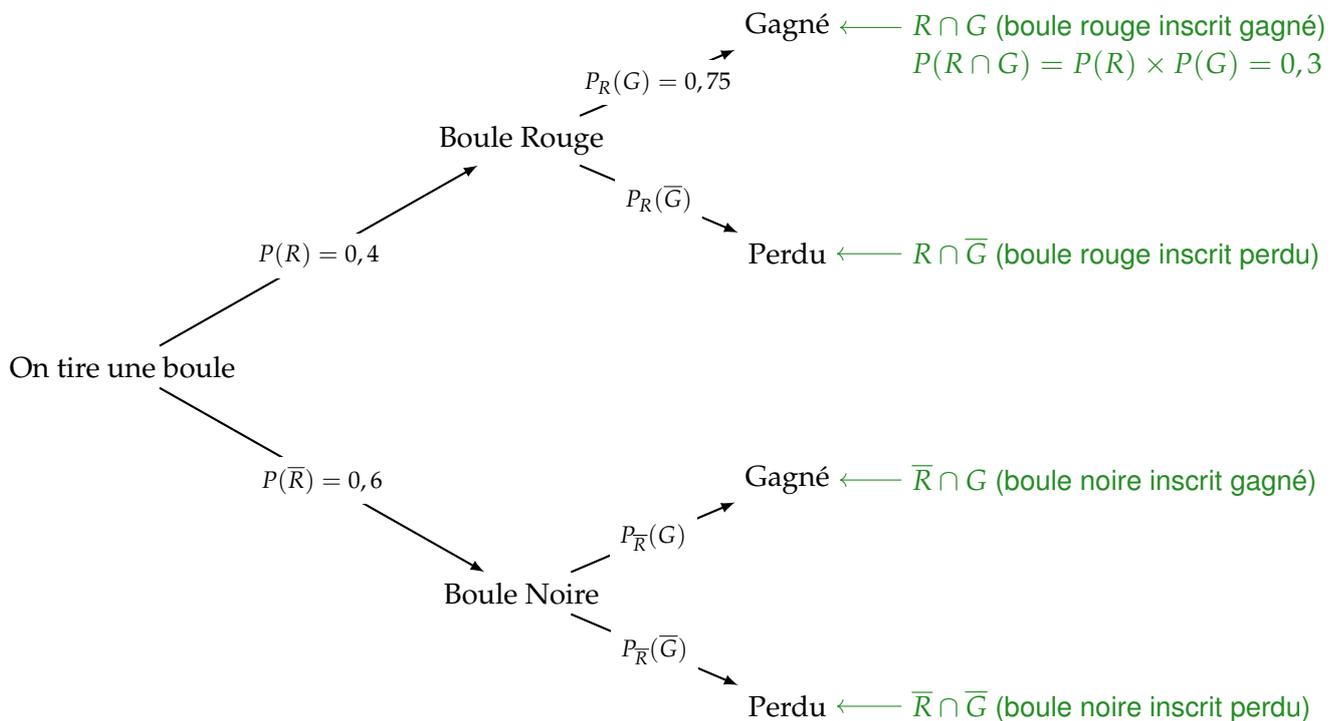
Soit A et B deux événements avec  $P(A) \neq 0$ .

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

## II. Arbre pondéré

### 1) Exemple

**Exemple** : On reprend le 2e exemple étudié au paragraphe I. L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



### 2) Règles

**Règle**

La somme des probabilités des branches issues d'un même nud est égale à 1.

### 🔗 Exemples :

- A partir du noeud « On tire une boule », on a :  $P(R) + P(\bar{R}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du noeud « Boule rouge », on a :  $P_R(\bar{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0,75 = 0,25$ .

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

### 📖 Règle

La probabilité d'une « feuille » (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

🔗 Exemple : On considère la feuille  $R \cap G$ . On a :

$$P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$$

### 📖 Règle

#### Formule des probabilités totales

La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

🔗 Exemple : L'événement « On tire une boule marquée Gagné » est associé aux feuilles  $R \cap G$  et  $\bar{R} \cap G$ . On a :

$$P(R \cap G) = 0,3 \text{ et } P(\bar{R} \cap G) = \frac{9}{50} = 0,18$$

(Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)

$$\text{Donc } P(G) = P(R \cap G) + P(\bar{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48.$$

### 🔗 Méthode - Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

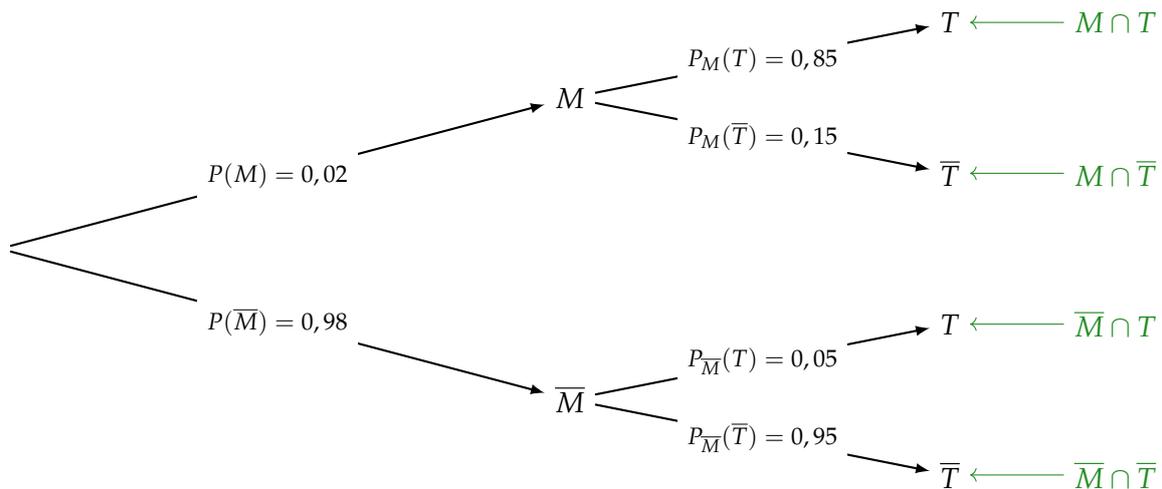
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement  $M$  et  $T$  les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?



La probabilité que le test soit positif est associée aux deux feuilles  $M \cap T$  et  $\bar{M} \cap T$ .

$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$  (Formule des probabilités totales)

$P(T) = 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066$ . La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

$$2) P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%.

### III. Indépendance de deux événements

#### Définition

On dit que deux événements  $A$  et  $B$  de probabilité non nulle sont indépendants lorsque  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

**Remarque** On a également :  $A$  et  $B$  sont indépendants, si et seulement si,  $P_A(B) = P(B)$  ou  $P_B(A) = P(A)$ .

**Exemple** : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit  $R$  l'événement « On tire un roi ».

Soit  $T$  l'événement « On tire un trèfle ».

Alors  $R \cap T$  est l'événement « On tire le roi de trèfle ».

On a :

$$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ et } P(R \cap T) = \frac{1}{32}$$

$$\text{Donc } P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$$

Les événements  $R$  et  $T$  sont donc indépendants. Ainsi, par exemple,  $P_T(R) = P(R)$ . Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

**Contre-exemple :**

On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

$$\text{Ainsi : } P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}, P(T) = \frac{8}{34} = \frac{4}{17} \text{ et } P(R \cap T) = \frac{1}{34}$$

$$\text{Donc } P(R) \times P(T) = \frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289} \neq P(R \cap T)$$

Les événements  $R$  et  $T$  ne sont donc pas indépendants.

### ☰ Méthode - Utiliser l'indépendance de deux événements

Dans une population, un individu est atteint par la maladie  $m$  avec une probabilité égale à  $0,005$  et par la maladie  $n$  avec une probabilité égale à  $0,01$ .

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit  $M$  l'événement « L'individu a la maladie  $m$  ».

Soit  $N$  l'événement « L'individu a la maladie  $n$  ».

On suppose que les événements  $M$  et  $N$  sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'événement  $E$  « L'individu a au moins une des deux maladies ».

$$P(E) = P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

$$P(E) = P(M) + P(N) - P(M) \times P(N), \text{ car les événements } M \text{ et } N \text{ sont indépendants.}$$

$$P(E) = 0,005 + 0,010 - 0,005 \times 0,01 = 0,01495$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à  $0,01495$ .

### ⚙️ Propriété

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

🔗 **Exemple :** Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a  $42\%$  de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et  $63\%$  sur l'autoroute A7.

Soit  $A$  l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6. »

Soit  $B$  l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7. »

On suppose que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

Alors les événements  $\bar{A}$  et  $B$  sont également indépendants et on a :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = 0,58 \times 0,63 = 0,3654$$

On peut interpréter ce résultat :

La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à  $36,54\%$ .