Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

....

....

....

Exemples :

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement « *Le résultat est un pique* ».
Soit B l'événement « *Le résultat est un roi* ».
Donc $A \cap B$ est l'événement « *Le résultat est le roi de pique* ».

Alors : $P(A) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{8}$.
On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

2) Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit « *Gagné* » ou soit « *Perdu* ».
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement « *On tire une boule rouge* ».
Soit G l'événement « *On tire une boule marquée Gagné* ».
Donc $R \cap G$ est l'événement « *On tire une boule rouge marquée Gagné* ».

Alors : $P(R) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et $P(R \cap G) = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :

$$P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{O,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

Remarque La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilité simples. On a en particulier :

Propriété

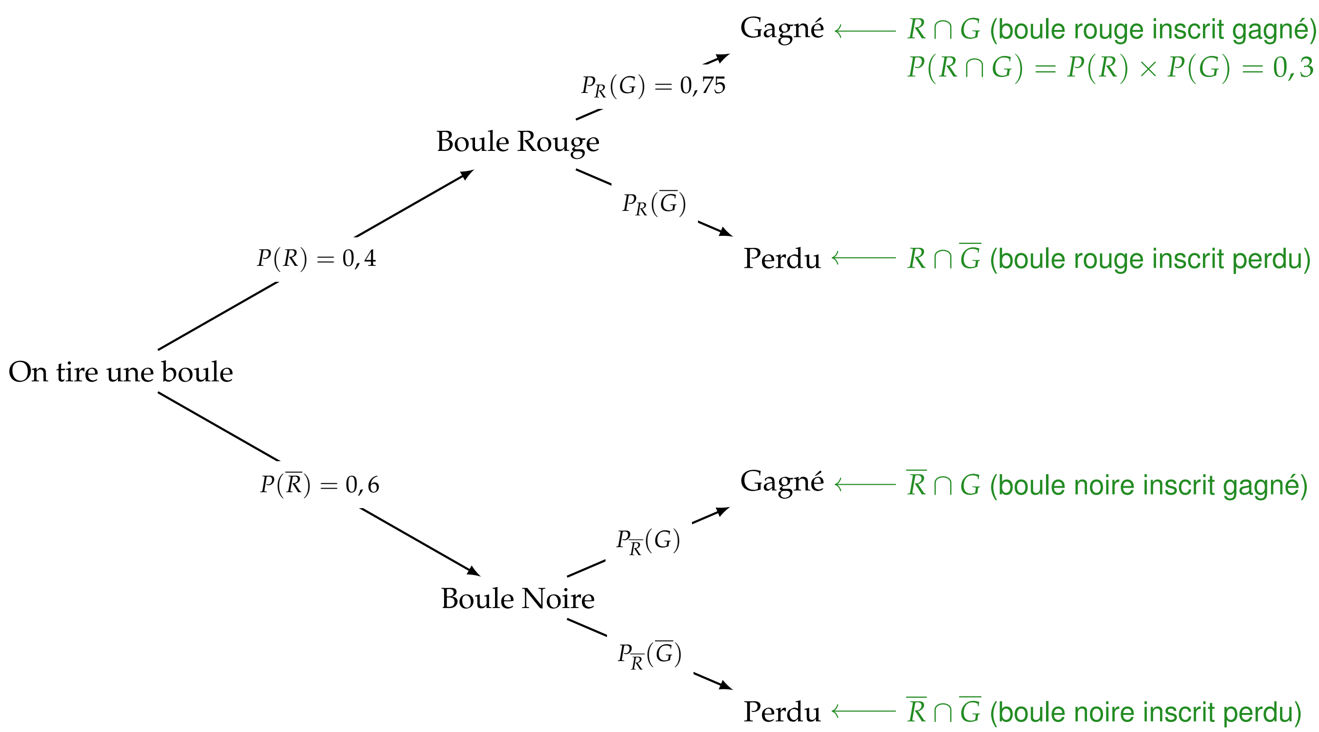
Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- ....
- ....
- ....

II. Arbre pondéré

1) Exemple

Exemple : On reprend le 2e exemple étudié au paragraphe I. L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) Règles

Règle

. . . .

Exemples :

- A partir du noeud « *On tire une boule* », on a : $P(R) + P(\overline{R}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du noeud « *Boule rouge* », on a : $P_R(\overline{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

Règle

. . . .

. . . .

Exemple : On considère la feuille $R \cap G$. On a :
$P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

Règle

Formule des probabilités totales

. . . .

. . . .

Exemple : L'événement « *On tire une boule marquée Gagné* » est associé aux feuilles $R \cap G$ et $\overline{R} \cap G$. On a :

$P(R \cap G) = 0,3$ et $P(\overline{R} \cap G) = \dfrac{9}{50} = 0,18$
(Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)
Donc $P(G) = P(R \cap G) + P(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48$.

Méthode - Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « *Être porteur de la maladie* » et « *Avoir un test positif* ».

1) Réaliser un arbre de probabilité
2) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010
3) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

III. Indépendance de deux événements

Définition

....

....

Remarque On a également : A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement « *On tire un roi* ».
Soit T l'événement « *On tire un trèfle* ».
Alors $R \cap T$ est l'événement « *On tire le roi de trèfle* ».

On a :
$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$
Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$
Les événements R et T sont donc indépendants. Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :
On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Ainsi : $P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$, $P(T) = \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{34}$
Donc $P(R) \times P(T) = \frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289} \neq P(R \cap T)$
Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Méthode - Utiliser l'indépendance de deux événements

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à $0,005$ et par la maladie n avec une probabilité égale à $0,01$.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit M l'événement « *L'individu a la maladie m* ».

Soit N l'événement « *L'individu a la maladie n* ».
On suppose que les événements M et N sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement E « *L'individu a au moins une des deux maladies* ».

Propriété

....

Exemple : Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7.
Soit A l'événement « *On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6.* »
Soit B l'événement « *On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7.* »
On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Alors les événements $\overline{A}$ et B sont également indépendants et on a :
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0,58 \times 0,63 = 0,3654$

On peut interpréter ce résultat :
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à $36,54\%$.