Chapitre 4

Suites géométriques

I. Rappels et expression du terme général d'une suite géométrique

1) exemple

Exemple : On considère la liste des trois nombres suivants : 4,12 et 36 . Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite géométrique ?
Pour y répondre, il faut s'assurer que le quotient entre deux termes consécutifs reste le même.
$12 \div 4 = 3$ et $36 \div 12 = 3$
Ce quotient reste égal à 3. 4,12 et 36 sont bien les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3. Si on note (u_n) cette suite, on a : $u_{n+1} = 3u_n$

2) forme explicite d'une suite géométrique

Méthode - Exprimer une suite géométrique en fonction de n

Enoncé :
On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4% par an. On note u_n la valeur du capital après n années.

1) Calculer u_2 et u_3.
2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4) Donner la variation de la suite (u_n).
5) Exprimer u_n en fonction de n.

Réponse :

1) Chaque année, le capital est multiplié par 1,04 .

$$\begin{aligned} u_0 &= 500 \\ u_1 &= 1,04 \times 500 = 520 \\ u_2 &= 1,04 \times 520 = 540,80 \\ u_3 &= 1,04 \times 540,80 = 562,432 \end{aligned}$$

2) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,04$. On parle ici de **croissance exponentielle**.
3) $u_{n+1} = 1,04u_n$
4) $q = 1,04 > 1$ donc la suite (u_n) est croissante.
5) Après 1 an, le capital est égal à : $u_1 = 1,04 \times 500$
Après 2 ans, le capital est égal à : $u_2 = 1,04^2 \times 500$
Après 3 ans, le capital est égal à : $u_3 = 1,04^3 \times 500$
De manière générale, après n années, le capital est : $u_n = 1,04^n \times 500$

Propriété

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, on a :

$$u_n = u_0 q^n$$
$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

II. Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

$$\text{Somme} = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{ raison }^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{ raison}}$$

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

1) On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 5$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer la somme :

$$\text{Somme } = \sum_{k=5}^{20} u_k$$

2) Chaque début d'année, on place un capital de 500 € sur un même compte à un taux annuel de 3%. Calculer la valeur totale disponible sur le compte après 7 ans.

1) **a)** $u_n = 5 \times 2^{n-1}$

b)

$$S = \sum_{k=5}^{20} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$$

Ainsi :
Somme $= u_5 \times \dfrac{1-q^{16}}{1-q} = 5 \times 2^4 \times \dfrac{1-2^{16}}{1-2} = -5 \times \left(1 - 2^{16}\right) = 5242800.$
On vérifie avec la calculatrice : Sur TI : som (suite $\left(5{}^\star 2^{x-1}, \mathrm{X}, 5, 20\right)\big)$
Sur Casio : $\sum_{X=5}^{201} \left(5 \times 2^{x-1}\right)$
La calculatrice affiche 5242800 . Donc

$$S = \sum_{k=5}^{20} u_k = 5242800$$

2) On considère la suite (v_n) exprimant la valeur acquise pour 500 € placés durant n années.
(v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 (correspondant à une augmentation de 3% par an) et de premier terme $v_0 = 500$.
On veut calculer la valeur totale acquise après 7 ans et 7 versements échelonnés chaque année :
Le 1er versement reste placé pendant 7 ans, il rapporte : $v_7 = 500 \times 1,03^7$
Le 2e versement reste placé pendant 6 ans, il rapporte : $v_6 = 500 \times 1,03^6$
Le 3e versement reste placé pendant 5 ans, il rapporte : $v_5 = 500 \times 1,03^5$
Le 4e versement reste placé pendant 4 ans, il rapporte : $v_4 = 500 \times 1,03^4$
Le 5e versement reste placé pendant 3 ans, il rapporte : $v_3 = 500 \times 1,03^3$
Le 6e versement reste placé pendant 2 ans, il rapporte : $v_2 = 500 \times 1,03^2$

Le 7e versement reste placé pendant 1 an, il rapporte : $v_1 = 500 \times 1,03^1$
La valeur totale acquise après 7 ans est la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{7} v_k$$

Soit :

$$\begin{aligned} S &= 500 \times 1,03^1 + 500 \times 1,03^2 + \cdots + 500 \times 1,03^7 \\ &= 500 \times \left(1,03^1 + 1,03^2 + \cdots + 1,03^7\right) \\ &\approx 500 \times 7,892 \\ &\approx 3946 \end{aligned}$$

La valeur acquise après 7 ans est environ égale à 3946.

III. moyenne géométrique de deux nombres

- La moyenne géométrique de deux nombres a et b positifs est un nombre c tel que :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

- On constate ainsi que pour une suite géométrique chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit. Pour une suite géométrique de terme u_n, on a en effet :

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Comme $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} &= c \\ ab &= c^2 \\ c^2 &= ab \\ c &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Méthode - Calculer une moyenne géométrique de deux nombres

Enoncé :

1) Calculer la moyenne géométrique de 4 et 9.

2) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ telle que la moyenne géométrique de u_0 et u_2 soit égale à 10. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

Réponse :

1) La moyenne géométrique de 4 et 9 est égale à $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$

2) Pour une suite géométrique, chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit. Donc en particulier ici, u_1 est la moyenne géométrique de u_0 et u_2. Donc $u_1 = 10$. Or, $u_1 = q \times u_0$ Soit : $10 = q \times 2$
Donc : $q = 5$.
La suite (u_n) a pour raison 5.

IV. Comparaison de suites

Méthode - Comparer deux suites

Enoncé :
Une banque propose deux options de placement : Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6% du capital de départ. - Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4% du capital de l'année précédente. On suppose que le placement initial est de 200. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre. On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

1) **a)** Calculer u_1, u_2 et u_3.
b) Calculer v_1, v_2 et v_3.

2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.

3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

4) Déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

Réponse :

1) **a)** Avec le placement A, on gagne chaque année 6% de $200 = 12$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 200 \\ u_1 &= 200 + 12 = 212 \\ u_2 &= 212 + 12 = 224 \\ u_3 &= 224 + 12 = 236 \end{aligned}$$

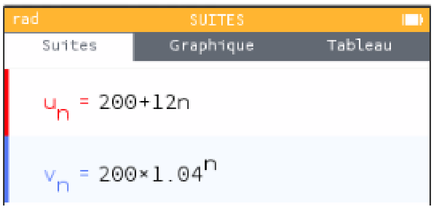
b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04 .

$$\begin{aligned} v_0 &= 200 \\ v_1 &= 1,04 \times 200 = 208 \\ v_2 &= 1,04 \times 208 = 216,32 \\ v_3 &= 1,04 \times 216,32 = 224,97 \end{aligned}$$

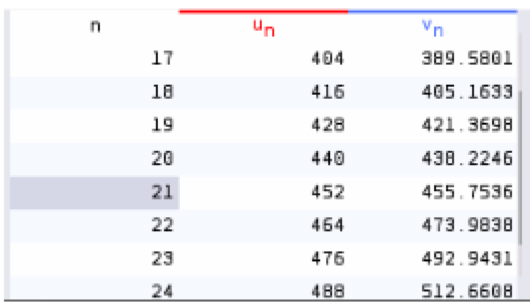
2) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 12$.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 200$ et de raison $q = 1,04$.

3) $u_n = 200 + 12n$ $\qquad v_n = 200 \times 1,04^n$

4)
Aller dans le menu suite et saisir la forme explicite des 2 suites :



Paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table.
Le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$ est 21.
Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.



n	un	vn
17	404	389.5801
18	416	405.1633
19	428	421.3698
20	440	438.2246
21	452	455.7536
22	464	473.9838
23	476	492.9431
24	488	512.6608