

## Chapitre 5

## Expressions algébriques

## I. Développer et factoriser

## 1) Développer

## 🗨 Définition

Développer une expression consiste à transformer un **produit** en une **somme** (ou une différence).

## ⚙ Propriété

Pour tous nombres réels  $k, a, b, c$  et  $d$  on a :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

## Méthode

Quand une parenthèse est précédée d'un signe moins, on développe en multipliant par  $-1$ , c'est à dire que l'on change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse. Sinon on ne change rien.

## 🔗 Exemple :

Simplifier :

$$A = (-6x - 4) - (5x - 4)$$

$$A = -6x - 4 - 5x + 4 = -11x$$

Développer :

$$B = (4x - 5)(7 - 3x)$$

$$B = 4x \times 7 - 3x \times 4x - 5 \times 7 + 5 \times 3x$$

$$B = -12x^2 + 43x - 35$$

## 2) Identités remarquable

## ⚙ Propriété

**Identités remarquables :** Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

🔗 **Exemple :** Factoriser les expressions  $P$  et  $Q$  ci-dessous.

$$P = (x - 3)^2 - 49$$

$$P = (x - 3)^2 - 7^2$$

$$P = ((x - 3) - 7)((x - 3) + 7)$$

$$P = (x - 10)(x + 4)$$

$$Q = (x + 1)^2 - (3 - x)^2$$

$$Q = \left( (x + 1) - (3 - x) \right) \left( (x + 1) + (3 - x) \right)$$

$$Q = (2x - 2) \times 4$$

$$Q = 4(2x - 2)$$

$$Q = 4 \times 2(x - 1)$$

$$Q = 8(x - 1)$$

### 3) Factoriser

#### 🗨️ Définition

Factoriser, c'est transformer une **somme (ou une différence)** en un **produit**.

🔗 **Exemple :**  $3x + 3y = 3 \times (x + y) = 3(x + y)$

📌 **Remarque** Devant une parenthèse, on fait souvent disparaître le signe  $\times$

#### ☰ Méthode - Factoriser

$$A = (2x + 3)(4x + 1) - (2x + 3)(x + 2)$$

$$A = (2x + 3)[\dots\dots]$$

$$A = (2x + 3)[(4x + 1)\dots\dots\dots]$$

$$A = (2x + 3)[(4x + 1) - \dots\dots]$$

$$A = (2x + 3)[(4x + 1) - (x + 2)]$$

- 1) Repérer le facteur commun  
Le facteur commun est  $(2x + 3)$
- 2) L'écrire devant et ouvrir un crochet
- 3) Se poser la question "Dans le premier terme par quoi est multiplié  $(2x + 3)$ ".  
L'écrire dans le crochet.
- 4) Recopier le signe "-" ou "+" qui séparerait les deux termes.
- 5) Se poser la question "Dans le second terme par quoi est multiplié  $(2x + 3)$ ".  
L'écrire dans le crochet et fermer le crochet.

🔗 **Exemple :** Factoriser  $B = (x - 1)(3x + 4) - (x - 1)(x + 3)$

$$B = (x - 1)(3x + 4) - (x - 1)(x + 3)$$

$$B = (x - 1)[(3x + 4) - (x + 3)]$$

$$B = (x - 1)[3x + 4 - x - 3]$$

$$B = (x - 1)(2x + 1)$$

## II. Résolution d'équations

## 1) Équations du premier degré

### a) propriété de la balance

#### ⚙️ Propriétés

On ne change pas une égalité en faisant une addition, soustraction, multiplication ou division par un même nombre. Autrement dit; pour trois nombres relatifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  (avec  $c \neq 0$  pour la division), si  $a = b$ , alors :

$$1) a + c = b + c$$

$$2) a - c = b - c$$

$$3) a \times c = b \times c$$

$$4) a \div c = b \div c$$

### b) Méthode de résolution

Il faut procéder par étapes. On va résoudre l'équation  $2(7 - 2x) = x + 5$

$2(7 - 2x) = x + 5$ $14 - 4x = x + 5$	<b>Etape 1</b> : on enlève les parenthèses(en développant).
$14 - 4x + 4x = x + 5 + 4x$ $14 = 5x + 5$ $14 - 5 = 5x + 5 - 5$ $9 = 5x$	<b>Etape 2</b> : on regroupe toutes les inconnues d'un côté du "=" et tous les nombres de l'autre côté du "=" en utilisant les propriétés de la balance 1 et 2.
$5x = 9$ $\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ $x = \frac{9}{5}$	A ce stade, il ne doit rester qu'une $\times$ ou une $\div$ ! <b>Etape 3</b> : si nécessaire, on utilise la propriété de la balance 3 ou 4 pour arriver à quelque chose de la forme " $x = \dots$ "
$\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ $x = \frac{9}{5}$	<b>Etape 4</b> : On teste l'égalité de départ pour la solution trouvée (ici, $x = \frac{9}{5}$ ) : si on trouve le même résultat, c'est que la solution est correcte!
Cette équation admet une solution : $\frac{9}{5}$	<b>Etape 5</b> : on écrit la conclusion.

#### 📌 Remarques

- 👉 Il peut être utile d'utiliser en premier la propriété pour supprimer un quotient :
 
$$\frac{7 + 12 + 9 + x}{4} = 10.$$
- 👉 Il ne doit rester plus qu'un seul nombre de chaque famille à la fin de l'étape 3.

## 2) Équation à produit nul

#### ⚙️ Propriété

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

### ☰ Méthode - Se ramener à une équation produit nul

- On écrit tous les termes à gauche de l'équation
- On FACTORISE → soit grâce à un facteur commun  
→ soit grâce à une identité remarquable
- On applique le produit nul.

🔗 Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$\begin{aligned} (7+x)(5x-3) - 2x(7+x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (7+x)[(5x-3) - 2x] & \\ \Leftrightarrow (7+x)(3x-3) & \\ \text{Si } a \times b = 0, \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0 & \\ \Leftrightarrow 7+x = 0 \text{ ou } 3x-3 = 0 & \\ \Leftrightarrow x = -7 \text{ ou } x = 1 & \\ S = \{-7; 1\} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1-5)(2x-1+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-6)(2x+4) &= 0 \\ \text{Si } a \times b = 0, \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0 & \\ \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \text{ ou } 2x+4 = 0 & \\ \Leftrightarrow 2x = 6 \text{ ou } 2x = -4 & \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2 & \\ S = \{-2; 3\} & \end{aligned}$$

### 3) Équation à quotient nul

#### ⚙️ Propriété

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul **ET son dénominateur ne l'est pas**

### ☰ Méthode - Résoudre une équation quotient nul

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\frac{7+x}{2x+6} - 2 = 0$

- 1) On détermine la valeur interdite :

L'expression  $\frac{7+x}{2x+6} - 2$  n'est pas définie si  $2x+6 = 0$  soit  $2x = -6$  donc  $x = -3$

La valeur interdite est  $-3$ . Il faut donc que  $x \neq -3$

- 2) On transforme l'expression pour avoir une seule fraction en mettant au même dénominateur :

$$\frac{7+x}{2x+6} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{7+x-2(2x+6)}{2x+6} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-5}{2x+6} = 0$$

- 3) On résout « numérateur = 0 »

$$-3x-5 = 0 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

- 4) On conclut en vérifiant bien que les solutions ne soient pas des valeurs interdites

$$S = \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$