Chapitre 1

Fonctions polynôme de dégré 2

I. Forme développée

Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage « *trinôme* ».

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra créer trois curseurs a, b, c puis dans la ligne de saisie taper $f(x) = ax^2 + bx + c$. On obtient ainsi le tracé de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ on s'intéressera aux cas où $a \neq 0$. (si $a = 0 f$ est une fonction affine)

Définition

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée **parabole**.

Exemple :

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ou $g(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $h(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1.
- $i(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

Variations de la fonction trinôme

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra, reprendre la manipulation précédente et prendre un $a > 0$. Faire alors varier b et c. Que constatez-vous quant variations de f ? Et si on prend un autre a strictement positif ? Conjecturer les variations de f en complétant le tableau de variation suivant :

1er cas $a > 0$:

x	
$f(x)$	

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra, reprendre la manipulation précédente et prendre un $a < 0$. Faire alors varier b et c. Que constatez-vous quant variations de f ? Et si on prend un autre a strictement négatif ? Conjecturer les variations de f en complétant le tableau de variation suivant :

2ème cas $a < 0$:

x	
$f(x)$	

Nous retiendrons donc :

Propriété

Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$f(x)$	↘	y_S	↗

Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$f(x)$	↗	y_S	↘

Définition

le point de coordonnés $(x_S; y_S)$ avec y_S l'extremum de f sur P est appelé **sommet de la parabole**.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Propriété

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.
Cette dernière écriture s'appelle **la forme canonique de f**.

Démonstration

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$$
$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$
$= a(x - \alpha)^2 + \beta$
avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra créer trois curseurs a, α, β puis dans la ligne de saisie taper $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. On obtient ainsi le tracé de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Compléter alors le cas général ci-dessous.

Propriété

Le sommet S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$

Propriété

La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x = \alpha$.

Avec ces nouvelles données, on peut maintenant compléter notre tableau de variations :

Propriété

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

III. passage de la forme développée à la forme canonique

Pour passer de la forme développée à la forme canonique, il existe 2 méthodes

1) passer à la forme canonique à l'aide d'identité remarquable

Méthode - Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Enoncé :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.
Réponse :
f doit être de la forme : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ou a, α et β sont des nombres réels.
$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$
On commence par mettre le a en facteur pour les 2 termes avec des x
$f(x) = 2[x^2 - 10x] + 10$
On fait ensuite apparaitre le 3ème terme d'une identité remarquable ($a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$)
$f(x) = 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10$

On factorise l'identité remarquable et on regroupe les termes qui restent ensemble.
$f(x) = 2[(x-5)^2 - 25] + 10$
$f(x) = 2(x-5)^2 - 50 + 10$
$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$
$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de f.

2) Cas général

Propriété

Pour passer de la forme développée à la forme canonique (ou inversement), on peut utiliser les formules :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 60x - 20$. On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

On commence par calculer α :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{60}{2 \times 3} = -10$.
Pour calculer β, on a 2 possibilités : soit on utilise la formule ci-dessus, soit on dit que $\beta = f(\alpha)$ et on remplace x par α dans l'expression $f(x)$