Chapitre 01 - Fonctions du second degré
Correction des exercices facultatifs

Exercice 1 - Étude de la forme développée
Pour chaque fonction polynôme suivante, identifiez les coefficients a, b, et c :

1) $f(x) = 4x^2 - 3x + 7$

$a = 4$, $b = -3$, $c = 7$

2) $g(x) = -2x^2 + 5x - 1$

$a = -2$, $b = 5$, $c = -1$

3) $h(x) = x^2 + 6x + 9$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 9$

Exercice 2 - identifier la forme d'un trinôme
f est une fonction polynôme du second degré. Dans chaque cas, préciser la forme de l'expression (développée, factorisée ou canonique) et préciser les valeurs a, b, c ou a, α, β.

1) $f(x) = 4x + 2x^2 - 1$

Forme développée, $a = 2$, $b = 4$, $c = -1$

2) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

Forme canonique, $a = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 5$

3) $f(x) = 3x - 2x^2 + 5$

Forme développée, $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$

4) $f(x) = -15x^2 + 3$

Forme développée, $a = -15$, $b = 0$, $c = 3$
Forme canonique, $a = -15$, $\alpha = 0$, $\beta = 3$

5) $f(x) = -3(x+4)^2 - 5$

Forme canonique, $a = -3$, $\alpha = -4$, $\beta = -5$

6) $f(x) = -5x^2$

Forme développée, $a = -5$, $b = 0$, $c = 0$
Forme canonique, $a = -5$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

7) $f(x) = 4 - 2(x+1)^2$

Forme canonique, $a = -2$, $\alpha = -1$, $\beta = 4$

8) $f(x) = -3 + 5x + 4x^2$

Forme développée, $a = 4$, $b = 5$, $c = -3$

Exercice 3 - Forme canonique et sommet Convertissez les fonctions suivantes en leur forme canonique et trouvez les coordonnées du sommet :

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

On identifie les coefficients $a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$. Comme ici $a = 1$, on cherche juste à compléter $x^2 - 6x$ pour faire apparaître l'IR.

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 8$$

$$f(x) = (x-3)^2 - 9 + 8$$

$$f(x) = (x-3)^2 - 1$$

Les coordonnées du sommet sont $S(3, -1)$

2) $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

On identifie les coefficients $a = 2$, $b = 4$ et $c = -3$. On factorise les 2 premiers termes par $a = 2$

$$g(x) = 2(x^2 + 2x) - 3$$

On complète $x^2 + 2x$ pour faire apparaitre l'IR

$$g(x) = 2(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2) - 3$$

$$g(x) = 2((x+1)^2 - 1) - 3$$

On développe

$$g(x) = 2(x+1)^2 - 2 - 3$$
$$g(x) = 2(x - (-1))^2 - 5$$

Les coordonnées du sommet sont $S(-1, -5)$

3) $h(x) = -x^2 + 2x + 5$

On identifie les coefficients $a = -1$, $b = 2$ et $c = 5$. On factorise les 2 premiers termes par $a = -1$

$$g(x) = -1(x^2 - 2x) + 5$$

On complète $x^2 - 2x$ pour faire apparaitre l'IR

$$g(x) = -(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 5$$

$$g(x) = -((x-1)^2 - 1) + 5$$

On développe

$$g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 5$$
$$g(x) = -(x-1)^2 + 6$$

Les coordonnées du sommet sont $S(1, 6)$

Exercice 4 - Tableau de variations
Pour chaque fonction polynôme du second degré suivante, dresser son tableau de variations (les valeurs du tableau de variations doivent être justifiées).

1) $f(x) = -2(x+7)^2 + 2$

on a $a = -2 < 0$, $\alpha = -7$ et $\beta = 2$ donc :

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

2) $g(x) = 3(x+1)(x-2)$

On commence par développer l'expression :
$g(x) = 3(x+1)(x-2) = (3x+3)(x-2) = 3x^2 - 6x + 3x - 6 = 3x^2 + 3x - 6$ d'ou $a = 3 > 0$
On détermine ensuite α et β :
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2}$ et $\beta = g(\alpha) = 3 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-5}{2} = \dfrac{-15}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{15}{4}$	$\nearrow$	

Exercice 5 - Tableau de variations Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

on a $a = -1 < 0$
On détermine ensuite α et β :
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = -1 \times 4 + 4 \times 2 - 3 = 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

2) $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$

on a $a = 2 > 0$
On détermine ensuite α et β :
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8}{4} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = 2 \times 4 - 8 \times 2 + 6 = -2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

3) $h(x) = x^2 + 2x + 1$

on a $a = 1 > 0$
On détermine ensuite α et β :
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 = 4$

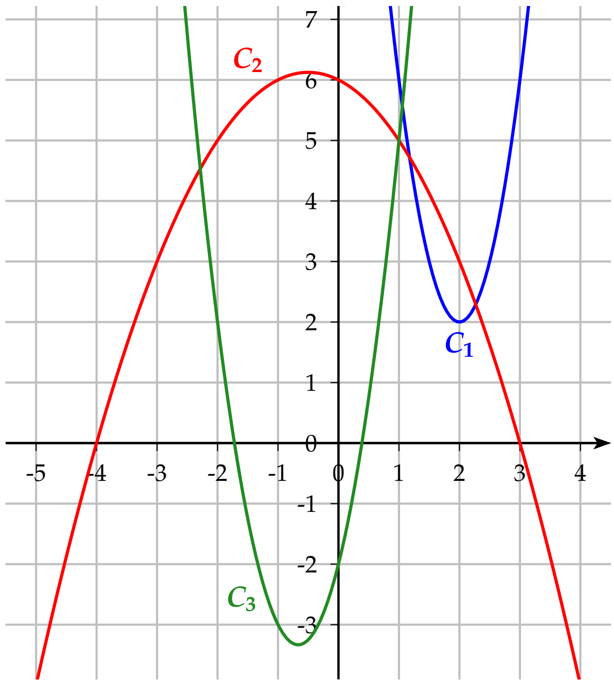
x	$-\infty$		1		$+\infty$
h		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Exercice 6 - graphiques et paraboles

f, g, h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

1) $f(x) = -0,5x^2 - 0,5x + 6$ **2)** $g(x) = 3x^2 + 4x - 2$ **3)** $h(x) = 4(x-2)^2 + 2$

Associer chaque courbe à sa fonction associée en expliquant la démarche.



Les coordonnées du sommet de C_1 sont $(2;2)$. Pour $h(x)$ on voit que $\alpha = 2$ et $\beta = 2$ donc C_1 est la courbe représentative de $h(x)$. Pour confirmation, on voit en outre que C_1 est une parabole tournée vers le haut et que pour $h(x)$, $a = 4 > 0$.

Le point d'intersection de C_2 et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0;6)$. or pour $f(x)$, $c = 6$. De plus C_2 est orienté vers le bas, et pour $f(x)$, $a = -1 < 0$ donc C_2 est la courbe représentative de $f(x)$.

Le point d'intersection de C_3 et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0;-2)$. or pour $g(x)$, $c = -2$. De plus C_3 est orienté vers le haut, et pour $g(x)$, $a = 3 > 0$ donc C_3 est la courbe représentative de $g(x)$.

Exercice 7

Un projectile est lancé avec une trajectoire donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 15$, où h est la hauteur en mètres et t le temps en secondes. Trouvez le temps au bout duquel le projectile atteint sa hauteur maximale et cette hauteur maximale.

- Temps pour la hauteur maximale : $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{20}{10} = 2$ secondes
- Hauteur maximale : $h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 15 = 35$ mètres

Exercice 8 - Applications pratiques

Une société de transport utilise une fonction polynôme pour modéliser le coût de maintenance de ses véhicules. Le coût $C(x)$ en euros pour x véhicules est donné par $C(x) = 3x^2 - 18x + 27$. Trouvez le nombre de véhicules pour lequel le coût de maintenance est minimal et ce coût minimal.

- Nombre de véhicules pour le coût minimal : $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{18}{6} = 3$
- Coût minimal : $C(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 27 = 0$ euros