Chapitre 1

Correction des exercices facultatifs - Repérage

Exercice 1 (Nature d'un repère et coordonnées)

Soit le repère (O,I,J) ci-contre :

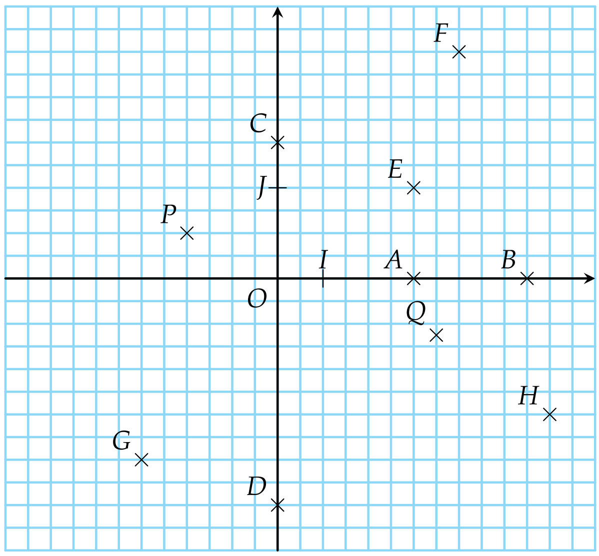
1) Ce repère est-il orthogonal ? Normé ? Orthonormé ?

Le repère (O, I, J) est orthogonal mais non normé car $OI \neq OJ$. Il n'est donc pas orthonormé.

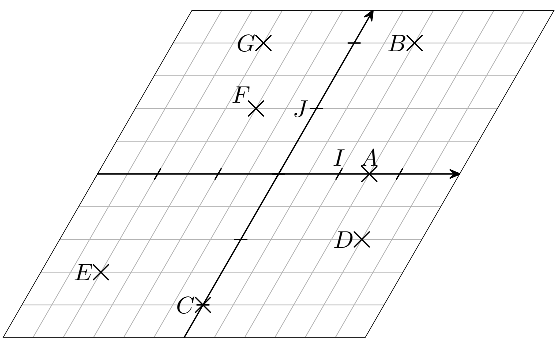
2) Lire les coordonnées de tous les points.

- $A(3;0)$
- $B(5,5;0)$
- $C(0;1,5)$
- $D(0;-5)$
- $E(3;1)$
- $F(4;2,5)$
- $G(-3;-2)$
- $H(6;-1,5)$

3) Placer les points P$(-4\ ;\ 2)$ et Q$(7\ ;\ -2,5)$.



Exercice 2 (Nature d'un repère et coordonnées)



Soit le repère (O,I,J) ci-contre :

1) Ce repère est-il orthogonal ? Normé ? Orthonormé ?

Le repère (O, I, J) est quelconque car $OI \neq OJ$ et $\widehat{IOJ} \neq 90°$

2) Lire les coordonnées de tous les points.

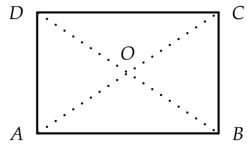
- $A(1,5;0)$
- $B(1;2)$
- $C(0;-2)$
- $D(2;-1)$
- $E(-2;-1,5)$
- $F(-1;1)$
- $G(-1,5;2)$

3) Placer les points P$(-2\ ;\ 1,5)$ et Q$(2\ ;\ -1)$.

Exercice 3 (Changement de repère) ABCD est un rectangle de centre O :

1) Donner les coordonnées des points A, B, C, D et O dans le repère (A, B, D).

- $A(0;0)$
- $B(1;0)$
- $C(1;1)$
- $D(0;1)$
- $O(0,5;0,5)$



2) Même question dans le repère (B, C, A).

- $A(0;1)$
- $B(0;0)$
- $C(1;0)$
- $D(1;1)$
- $O(0.5;0.5)$

3) Même question dans le repère (O, A, B).

- $A(1;0)$
- $B(0;1)$
- $C(-1;0)$
- $D(0;-1)$
- $O(0;0)$

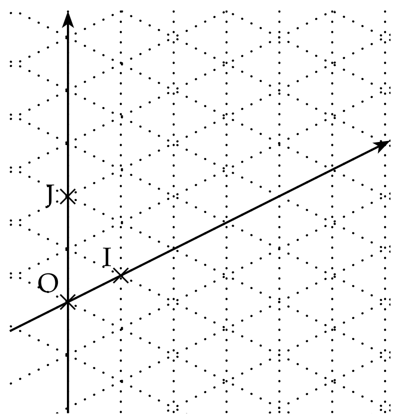
Exercice 4 (Milieu)
Le plan est muni d'un repère quelconque. On donne les points A$(2\,;\,3)$ et I$(-4\,;\,1)$.
On sait que I est le milieu de [AB]. Déterminer les coordonnées du point B.

On sait que I est le milieu de $[AB]$, donc :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = x_I \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2 + x_B}{2} = -4 \\ \dfrac{3 + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + x_B = -8 \\ 3 + y_B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -10 \\ y_B = -1 \end{cases}$$

Donc, les coordonnées de B sont $(-10, -1)$.

Exercice 5 (Milieux et parallélogrammes)
Soit le repère (O,I,J) ci-contre :



1) Quelle est la nature du repère ?

Le repère (O, I, J) est quelconque car $OI \neq OJ$ et $\widehat{IOJ} \neq 90°$

2) Placer les points A$(1\,;\,2)$, B$(4\,;\,1{,}5)$, C$(6\,;\,-1)$ et D$(3\,;\,-0.5)$.

3) Faire une conjecture sur la nature du quadrilatère ABCD.

Conjecture : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

4) Déterminer par le calcul les coordonnées du point M milieu de [AC].

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = M\left(\frac{1+6}{2}; \frac{2-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

5) Déterminer par le calcul les coordonnées du point N milieu de [BD].

$$N\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = N\left(\frac{4+3}{2}; \frac{1{,}5 - 0{,}5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

6) Démontrer alors la conjecture faite en 2) sur la nature du quadrilatère ABCD.

Les diagonales se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 6 (Milieux et parallélogrammes) Le plan est muni d'un repère quelconque. On donne les points A$(-5\,;\,3)$, B$(-4\,;\,1)$ et C$(1\,;\,-4)$.

1) Déterminer les coordonnées de M, milieu de [AC].

Les coordonnées du milieu M de $[AC]$ sont :

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=M\left(\frac{-5+1}{2};\frac{3-4}{2}\right)=(-2;-0,5)$$

2) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, M doit être le milieu de $[BD]$. Donc :

$$\begin{cases}\dfrac{x_D+x_B}{2}=x_M\\ \dfrac{y_D+y_B}{2}=y_M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_D+2}{2}=-2\\ \dfrac{y_D-3}{2}=-0,5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D+2=-4\\ y_D-3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=-6\\ y_D=2\end{cases}$$

Donc, les coordonnées de D sont $(-6,-2)$.

Exercice 7 Nature d'un triangle - Aire et périmètre On considère les points $\mathrm{A}(6;5),\mathrm{B}(2;-3)$ et $\mathrm{C}(-4;0)$.

1) Calculer les distances AB, BC et AC.

Les distances sont :

$$AB=\sqrt{(6-2)^2+(5+3)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{(2+4)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

$$AC=\sqrt{(6+4)^2+(5-0)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

2) En déduire la nature du triangle ABC.

On a $AB\neq AC\neq BC$, le triangle n'est ni isocèle ni équilatéral.
On a d'une part $AC^2=125$ et d'autre part $AB^2+BC^2=80+45=125$.
On voit que $AC^2=AB^2+BC^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée, donc d'après la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

3) Calculer le périmètre et l'aire de ce triangle.

Le périmètre est :

$$P=AB+BC+AC=4\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}=12\sqrt{5}$$

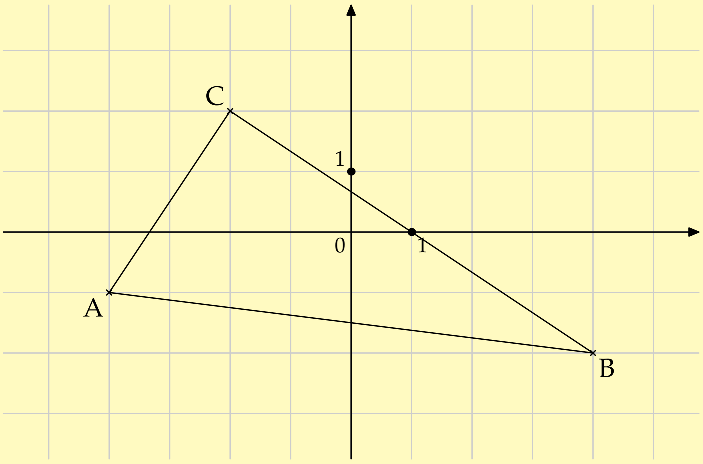
L'aire est :

$$A=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\frac{BC\times AB}{2}=\frac{3\sqrt{5}\times4\sqrt{5}}{2}=30\text{ ua}$$

Exercice 8 (Nature d'un triangle - Théorème de Pythagore)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle ABC.

1) $\mathrm{A}\,(-4\,;\,-1)$, $\mathrm{B}\,(4\,;\,-2)$ et $\mathrm{C}\,(-2\,;\,2)$



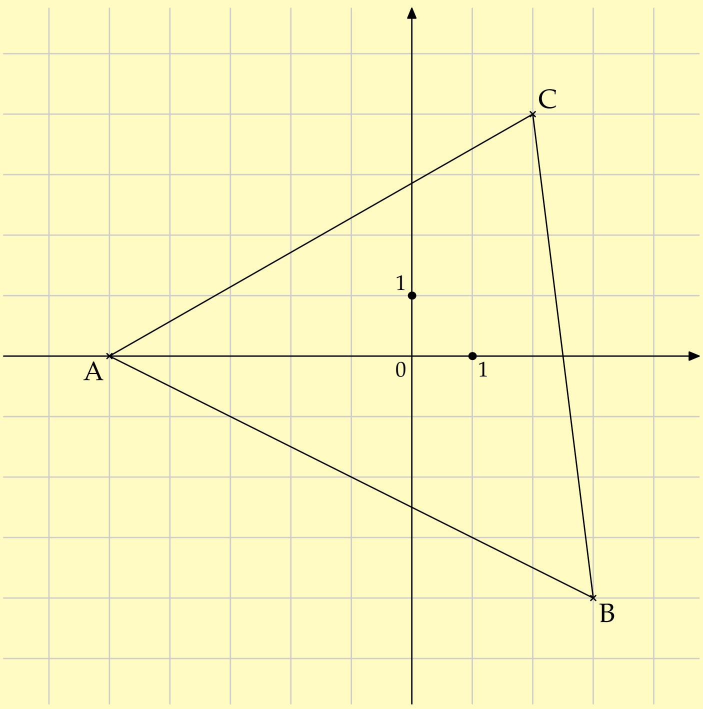
$$AB = \sqrt{(4-(-4))^2+(-2-(-1))^2} = \sqrt{8^2+(-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(4-(-2))^2+(-2-2)^2} = \sqrt{6^2+(-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$AC = \sqrt{(-4-(-2))^2+(-1-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

On a d'une part $AB^2 = 65$ et d'autre part $AC^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65$.
On voit que $AB^2 = AC^2 + BC^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée, donc d'après la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

2) A $(-5\,;0)$, B $(3\,;-4)$ et C $(2\,;4)$



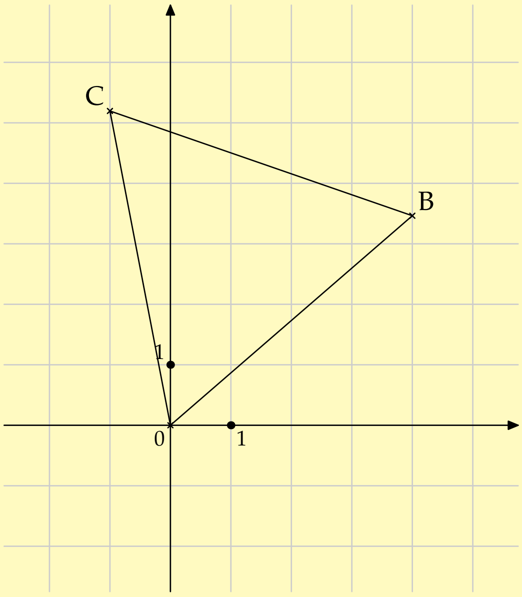
$$AB = \sqrt{(3-(-5))^2+(-4-0)^2} = \sqrt{8^2+(-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(3-2)^2+(-4-4)^2} = \sqrt{1^2+(-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

$$AC = \sqrt{(-5-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

Le triangle ABC est isocèle mais pas rectangle.

3) A $(0\,;\,0)$, B $(4\,;\,2\sqrt{3})$ et C $(-1\,;\,3\sqrt{3})$



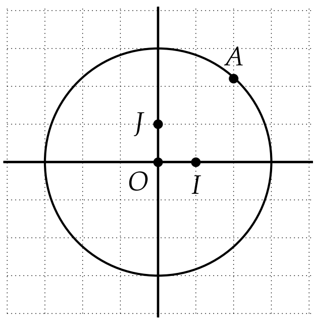
$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + \left(2\sqrt{3}-0\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+12} = \sqrt{28}$$

$$BC = \sqrt{(-1-4)^2 + \left(3\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{(-5)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25+3} = \sqrt{28}$$

$$AC = \sqrt{(0-(-1))^2 + (0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+(3\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+27} = \sqrt{28}$$

On a $AB = BC = AC$, le triangle ABC est donc équilatéral.

Exercice 9 (Triangle rectangle et calcul de distances)
Dans le repère orthonormé (O,I,J), on a tracé le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3.



1) A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2. Déterminer l'ordonnée de A.

Si A est sur le cercle de centre O et de rayon 3, cela signifie que $OA = 3$
$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{2^2 + y_A^2}$.
On a donc $3 = \sqrt{4 + y_A^2} \iff 9 = 4 + y_A^2 \iff y_A^2 = 5 \iff y_A = \sqrt{5}$ ou $y_A = -\sqrt{5}$.
D'après la figure, $y_A > 0$, donc $y_A = \sqrt{5}$

2) Pour chacun des points suivants, déterminer, par le calcul, s'il est sur le cercle $\mathcal{C}$:
B $(-1\,;\,-2,8)$ C $(2,5\,;\,-1,7)$ D $(-1,5\,;\,2,5)$

- $B(-1,-2.8)$:

$$(-1)^2 + (-2.8)^2 = 1 + 7.84 = 8.84 \neq 9 \Rightarrow B \text{ n'est pas sur le cercle } C$$

- $C(2.5,-1.7)$:

$$(2.5)^2 + (-1.7)^2 = 6.25 + 2.89 = 9.14 \neq 9 \Rightarrow C \text{ n'est pas sur le cercle } C$$

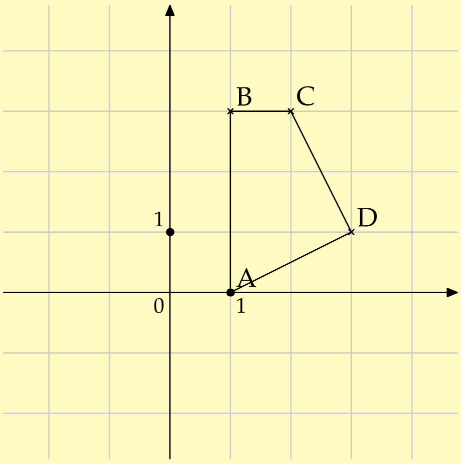
- $D(-1.5, 2.5)$:

$$(-1.5)^2 + (2.5)^2 = 2.25 + 6.25 = 8.5 \neq 9 \Rightarrow D \text{ n'est pas sur le cercle } C$$

Exercice 10 (Nature d'un quadrilatère) Le plan est muni d'un repère orthonormé.
En faisant d'abord une figure, conjecturer dans chacun des cas suivants, la nature du quadrilatère ABCD, puis la

démontrer :

1) A (1 ; 0), B (1 ; 3), C (2 ; 3) et D (3 ; 1) ;



Milieu de $[AC]$ **:** Les coordonnées du milieu M de $[AC]$ sont données par :

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+2}{2};\frac{0+3}{2}\right)=M(1,5;1,5)$$

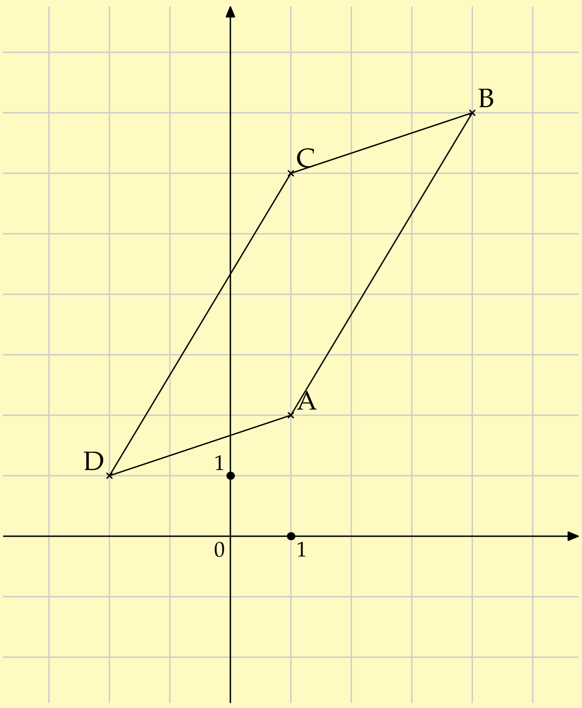
Milieu de $[BD]$ **:** Les coordonnées du milieu N de $[BD]$ sont données par :

$$N\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{1+3}{2};\frac{3+1}{2}\right)=N(2;2)$$

Les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ne sont pas les mêmes, donc ABCD est un quadrilatère quelconque.

2) A (1 ; 2), B (4 ; 7), C (1 ; 6) et D (−2 ; 1) ;



Milieu de $[AC]$ **:** Les coordonnées du milieu M de $[AC]$ sont données par :

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+1}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = M(1;4)$$

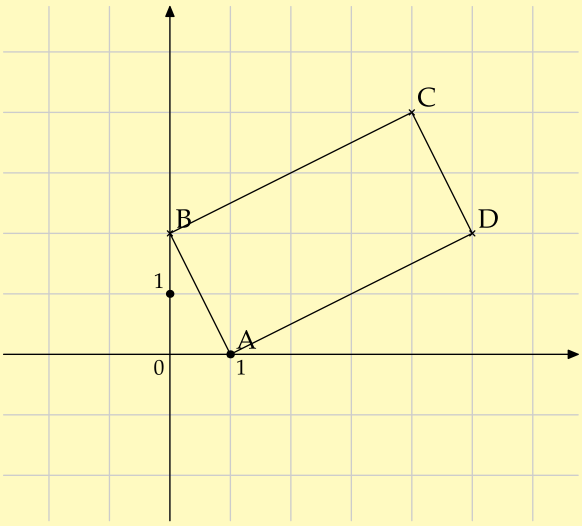
Milieu de $[BD]$ **:** Les coordonnées du milieu N de $[BD]$ sont données par :

$$N\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{4+(-2)}{2}; \frac{7+1}{2}\right) = N(1;4)$$

Les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont identiques, donc les diagonales se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

3) A (1 ; 0), B (0 ; 2), C (4 ; 4) et D (5 ; 2) ;



Milieu de $[AC]$ **:** Les coordonnées du milieu M de $[AC]$ sont données par :

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+4}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = M(2,5;2)$$

Milieu de $[BD]$ **:** Les coordonnées du milieu N de $[BD]$ sont données par :

$$N\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{0+5}{2}; \frac{2+2}{2}\right) = N(2,5;2)$$

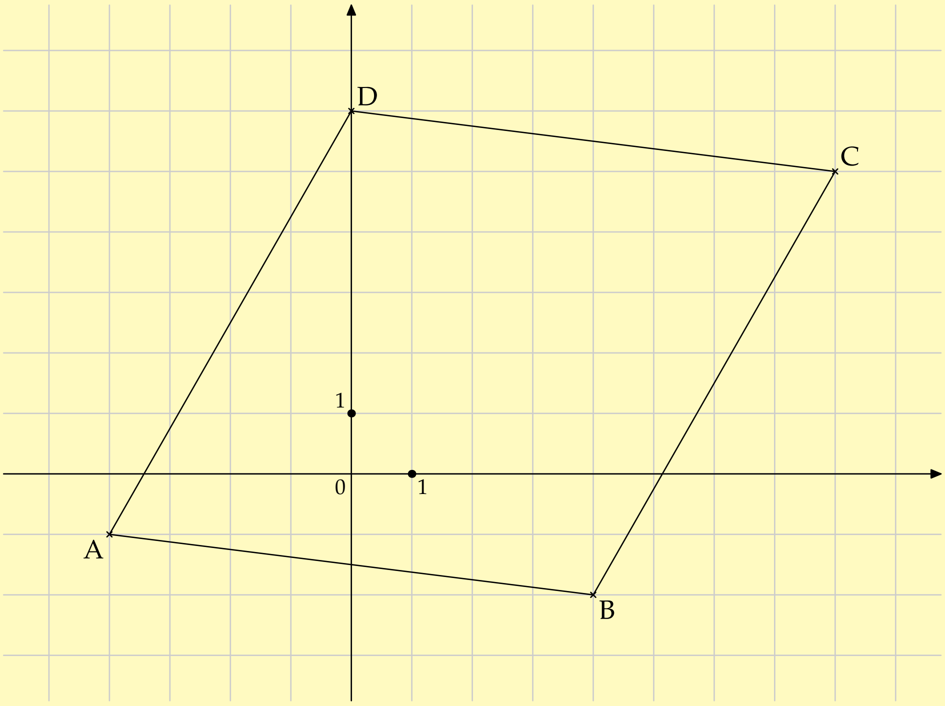
Les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont identiques, donc les diagonales se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.
Calculons la longueur des diagonales :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5$$

Les 2 diagonales font la même longueur, ABCD est donc un rectangle

4) A $(-4\,;\,-1)$, B $(4\,;\,-2)$, C $(8\,;\,5)$ et D $(0\,;\,6)$;



Milieu de $[AC]$ **:** Les coordonnées du milieu M de $[AC]$ sont données par :

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-4+8}{2};\frac{-1+5}{2}\right)=M(2;2)$$

Milieu de $[BD]$ **:** Les coordonnées du milieu N de $[BD]$ sont données par :

$$N\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{4+0}{2};\frac{-2+6}{2}\right)=N(2;2)$$

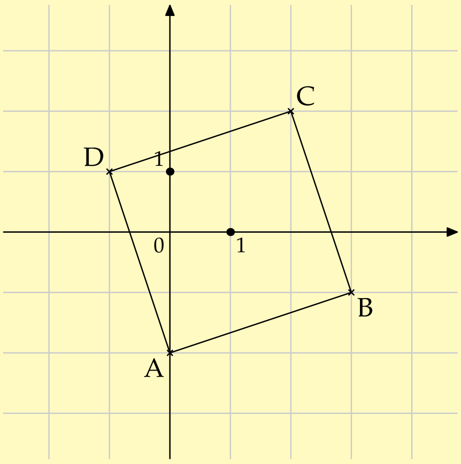
Les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont identiques, donc les diagonales se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

$$AB=\sqrt{(4-(-4))^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{8^2+(-1)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$$

$$BC=\sqrt{(8-4)^2+(5-(-2))^2}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

ABCD est un parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs égaux, c'est donc un losange

5) A $(0\,;\,-2)$, B $(3\,;\,-1)$, C $(2\,;\,2)$ et D $(-1\,;\,1)$.



Milieu de $[AC]$ **:** Les coordonnées du milieu M de $[AC]$ sont données par :

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{0+2}{2}; \frac{-2+2}{2}\right) = M(1;0)$$

Milieu de $[BD]$ **:** Les coordonnées du milieu N de $[BD]$ sont données par :

$$N\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{3+(-1)}{2}; \frac{-1+1}{2}\right) = N(1;0)$$

Les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont identiques, donc les diagonales se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

ABCD est un parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs égaux, c'est donc un losange Calculons la longueur des diagonales :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Les 2 diagonales font la même longueur, ABCD est donc un rectangle.
ABCD est donc un rectangle et un losange, ABCD est donc un carré.