Chapitre 2

Trigonométrie

I. Cercle trigonométrique et radian

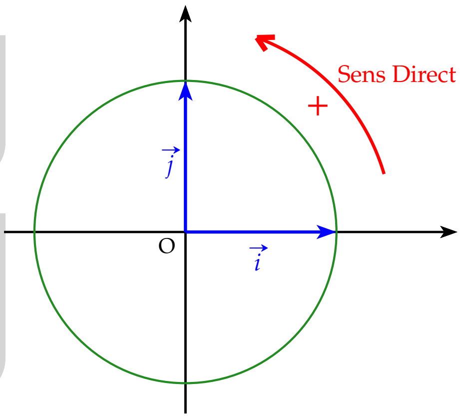
1) Le cercle trigonométrique

Définition

Sur un cercle, on appelle **sens direct, sens positif ou sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

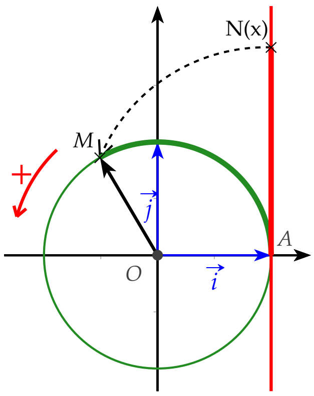
Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}\,; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.



2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(\text{O}\,; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$), on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A; \vec{\jmath}\,)$ soit un repère de la droite.
Si l'on « *enroule* » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.
La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

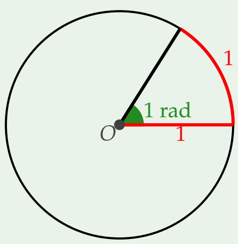


3) Le radian

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360°ou 2π radians.

Définition

On appelle **radian**, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degrée(°)	0	30	45	60	90	180	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode - Passer des degrés aux radians et réciproquement

Enoncé :

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

Réponse :

2π	α	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	β

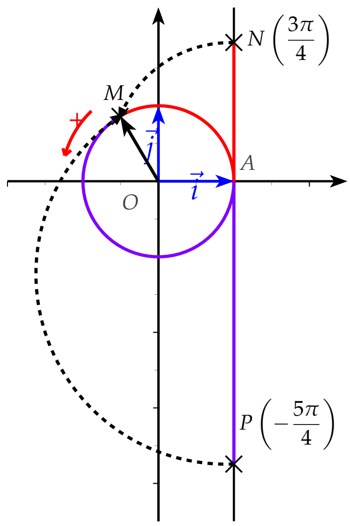
1) $\alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}$

2) $\beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67,5°$

II. Mesure d'un angle orienté

1) Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.



Exemples :

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.
  En effet : $\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$
- On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant 1, 2, 3, ... tours successifs.

Méthode - Placer un point sur le cercle trigonométrique

Enoncé :

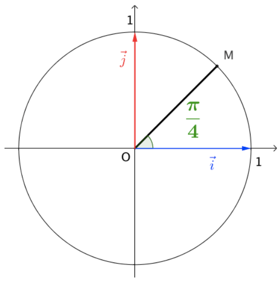
1) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.

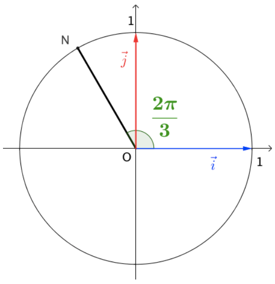
2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.

Réponse :

1) $\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{8\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$.
Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\dfrac{\pi}{4}$ rad.

2) $\dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$.
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ rad.





2) Mesure principale d'un angle orienté

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ alors tout angle de la forme $\theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$.
On dit que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ est égal à θ modulo 2π.

Définition

La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exemple : Une mesure d'un angle orienté est $\dfrac{7\pi}{4}$.
D'autres mesures sont : $\dfrac{7\pi}{4} - 2\pi\,;\dfrac{7\pi}{4} - 4\pi\,;\dfrac{7\pi}{4} - 6\pi\,;$ ... soit : $-\dfrac{\pi}{4}\,;-\dfrac{9\pi}{4}\,;-\dfrac{17\pi}{4}\,;$ ...
$-\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre π exclu et π.

Méthode - Donner la mesure principale d'un angle

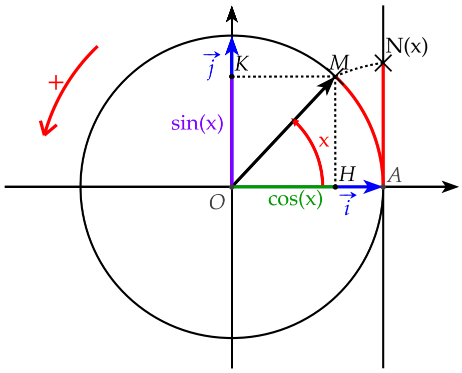
Enoncé :
Donner la mesure principale de l'angle $\dfrac{27\pi}{4}$.

Réponse :
On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :
$\dfrac{27\pi}{4} = \dfrac{28\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 7\pi - \dfrac{\pi}{4}$
Dans 7π, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :
$\dfrac{27\pi}{4} = 6\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4} = 6\pi + \dfrac{4\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 6\pi + \dfrac{3\pi}{4}$
6π correspond à 3 tours entiers.
$\dfrac{3\pi}{4}$ est bien compris entre π exclu et π.
La mesure principale de $\dfrac{27\pi}{4}$ est $\dfrac{3\pi}{4}$.

III. Cosinus et sinus d'un angle

1) Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.
Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définitions

- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos x$.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin x$.

2) Propriétés

Propriétés

- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
- $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

Remarque $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$

3) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

4) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés

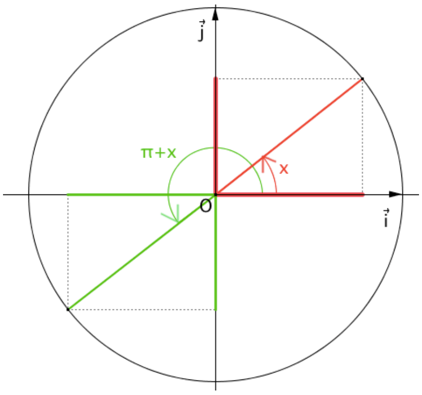
Pour tout nombre réel x, on a :

1) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
2) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
3) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.
4) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

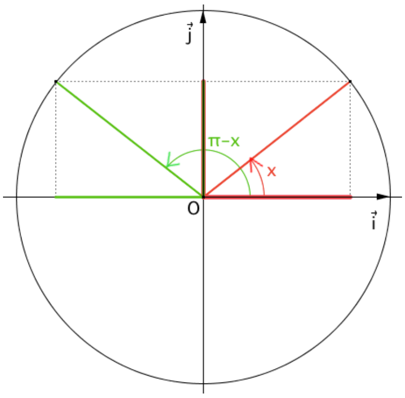
Démonstration

Par symétries, on démontre les résultats :

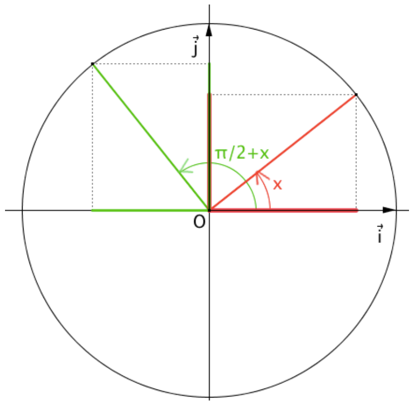
1)



2)



3)



4)