

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

I. Intervalles de \mathbb{R}

1) Définition d'un intervalle

Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$:

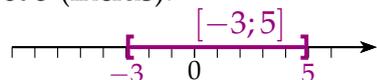
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l'**intervalle** $[a; b]$.

Il contient tous les nombres compris entre a (inclus) et b (inclus).

On peut le représenter sur la droite réelle.



Exemple : l'intervalle $[-3; 5]$ contient tous les nombres compris entre -3 (inclus) et 5 (inclus).



Donc $1 \in [-3; 5]$ $-1 \in [-3; 5]$ $12 \notin [-3; 5]$ $-5 \notin [-3; 5]$
 $5 \in [-3; 5]$

Remarque On utilise les symboles \in "appartient" et \notin "n'appartient pas".

2) Différents types d'intervalles

Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$:

L'ensemble des réels x tels que :

$$a \leq x \leq b$$

est l'intervalle

$$[a; b]$$



$$a < x < b$$

est l'intervalle

$$]a; b[$$



$$a \leq x < b$$

est l'intervalle

$$[a; b[$$



$$a < x \leq b$$

est l'intervalle

$$]a; b]$$



$$a \leq x$$

est l'intervalle

$$[a; +\infty[$$

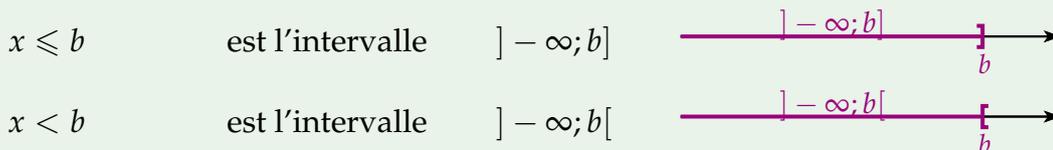


$$a < x$$

est l'intervalle

$$]a; +\infty[$$

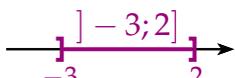
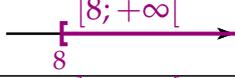
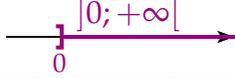
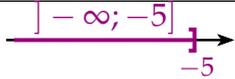




Remarques

- ☞ $+\infty$ se lit "plus l'infini" et $-\infty$ se lit "moins l'infini",
- ☞ l'intervalle $[a ; b[$ est **fermé** en a (crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle) : $a \in [a ; b[$, et est **ouvert** en b (crochet tourné vers l'extérieur de l'intervalle) : $b \notin [a ; b[$,
- ☞ On écrit toujours $] - \infty$ et $+\infty[$ (intervalles ouverts).

Exemple :

Inégalité	Signification	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 5$	x est compris entre 2 (inclus) et 5 (inclus)	$x \in [2 ; 5]$	
$-3 < x \leq 2$	x est compris entre -3 (exclu) et 2 (inclus)	$x \in] - 3 ; 2]$	
$-5 \leq x < -1$	x est compris entre -5 (inclus) et -1 (exclu)	$x \in [-5 ; -1[$	
$-2 < x < 8$	x est compris entre -2 (exclu) et 8 (exclu)	$x \in] - 2 ; 8[$	
$8 \leq x$	x est supérieur ou égal à 8	$x \in [8 ; +\infty [$	
$x > 0$	x est strictement supérieur à 0	$x \in]0 ; +\infty [$	
$x \leq -5$	x est inférieur ou égal à -5	$x \in] - \infty ; -5]$	
$7 > x$	x est strictement inférieur à 7	$x \in] - \infty ; 7[$	

Remarque Dans l'intervalle $[a ; b]$, le nombre $b - a$ s'appelle l'**amplitude** de l'intervalle.

3) Intersection et réunion d'intervalles

Définition

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} ,

- **L'intersection** des intervalles I et J , notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à l'intervalle I **et** à la fois à l'intervalle J (les deux en même temps)
- **La réunion** des intervalles I et J , notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I **soit** à l'intervalle J **soit** aux deux (l'un des deux ou les deux).

Remarques

☞ \cap se lit *inter*

☞ $x \in I \cap J$ se lit $x \in I$ **ET** $x \in J$

☞ \cup se lit *union*

☞ $x \in I \cup J$ se lit $x \in I$ **OU** $x \in J$

Exemple :

Soient les intervalles $I =]-\infty; 3]$ et $J =]-3; 5]$, on veut déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

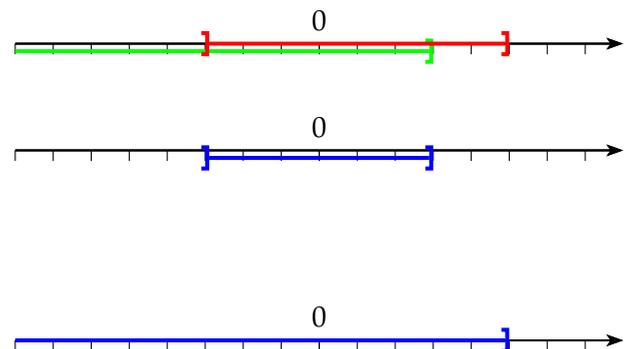
On représente I (en vert) et J (en rouge) sur la droite réelle :

- $I \cap J$ correspond à la partie de la droite colorée en vert **ET** en rouge

$$I \cap J =]-3; 3]$$

- $I \cup J$ correspond à la partie de la droite colorée en vert **OU** en rouge, c'est à dire soit vert, soit rouge, soit les deux.

$$I \cup J =]-\infty; 5]$$



☞ **Remarque** $x \neq b$ signifie que x est soit strictement plus petit que b , soit strictement plus grand que b .

On écrit cet intervalle $] - \infty; b[\cap] b; + \infty[$

☞ **Exemple :** L'ensemble des réels non nuls \mathbb{R}^* correspond à $x \neq 0$. Il peut s'écrire sous la forme d'une réunion d'intervalles $] - \infty; 0[\cup] 0; + \infty[$ ou encore $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

L'expression $\frac{4x+5}{x-7}$ est définie pour $x \in] - \infty; 7[\cup] 7; + \infty[$

II. Vocabulaire et notation

Intro

Dans un salle de spectacle, l'achat d'un abonnement à 30 € permet d'avoir un tarif réduit sur les places de spectacle et de la payer 15 €.

Prix du spectacle pour :

- 2 places : $30 + 2 \times 15 = 60$ €
- 4 places : $30 + 4 \times 15 = 90$ €
- 10 places : $30 + 10 \times 15 = 180$ €
- x places : $30 + x \times 15 = 30 + 15x$ €

Pour un nombre de places donné, on fait correspondre le prix à payer.

Par exemple : $2 \mapsto 60$ $10 \mapsto 180$

De façon générale, pour x places, on note : $x \mapsto 30 + 15x$

$x \mapsto 30 + 15x$ se lit « à x , on associe $30 + 15x$ »

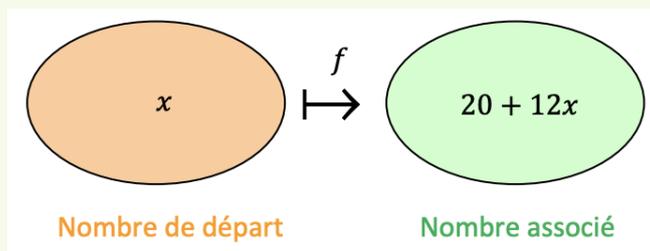
La correspondance qu'on a établie entre x et $30 + 15x$ peut porter un nom.

Vocabulaire

Vocabulaire et notations On va l'appeler f , et on note :

$$f : x \mapsto 30 + 15x$$

f est appelée une fonction. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



x est appelée la variable.

On note également :

$$f(x) = 30 + 15x$$

Remarque $f(x)$ se lit « f de x ».

Exemple : $f : 10 \mapsto 150$ peut donc s'écrire : $f(10) = 150$

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau qui s'appelle tableau de valeurs.

x	2	4	10
$f(x)$	60	90	180

☰ Méthode - Résoudre un problème à l'aide d'une fonction

Énoncé : On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Enlever 4
- Multiplier par 3
- Ajouter 7

- 1) Appliquer le programme en prenant 5 comme nombre de départ.
- 2) On prend x comme nombre de départ.
Donner le résultat du programme en fonction de x .
- 3) On appelle f la fonction qui associe à x le résultat du programme.
Donner l'expression de la fonction f à l'aide des deux notations suivantes :
 $f : x \mapsto \dots$ $f(x) = \dots$
- 4) Compléter le tableau de valeurs :

x	5	8	12
$f(x)$			

réponse :

- 1) En prenant 5 au départ :

- 5
- $5 - 4 = 1$
- $3 \times 1 = 3$
- $3 + 7 = 10$

En prenant 5 au départ, on obtient 10.

- 2) En prenant x au départ :

- x
- $x - 4$
- $3 \times (x - 4)$
- $3 \times (x - 4) + 7$

En prenant x au départ, on obtient $3(x - 4) + 7$.

On peut simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} 3 \times (x - 4) + 7 &= 3 \times x + 3 \times (-4) + 7 \\ &= 3x - 12 + 7 \\ &= 3x - 5 \end{aligned}$$

- 3) $f(x) = 3x - 5$ $f : x \mapsto 3x - 5$

- 4)

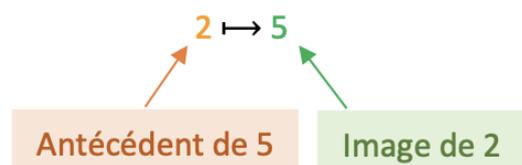
x	4	6	10
$f(x)$	7	11	19

$$\begin{aligned} &3 \times 4 - 5 \\ &= 12 - 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

III. Image, Antécédent

1) image et antécédent

🔗 **Exemple :** Dire que : $f(2) = 5$ signifie que :



Vocabulaire

On dit que :

- l'image de 2 par la fonction f est 5.
- un antécédent de 5 par f est 2.

Méthode - Déterminer une image et un antécédent par une fonction**Énoncé :**

Soit le tableau de valeurs suivant de la fonction f :

x	-4	6	10	18	20
$f(x)$	18	20	-4	38	18

Compléter alors :

- 1) L'image de -4 par f est ...
- 2) $f : \dots \mapsto -4$
- 3) $f(20) = \dots$
- 4) Un antécédent de 18 par f est ...

réponse :

- 1) L'image de -4 par f est 18, car $-4 \mapsto 18$.
- 2) $f : 10 \mapsto -4$
- 3) $f(20) = 18$
- 4) Un antécédent de 18 par f est -4 ou 20, car $f(-4) = 18$ et $f(20) = 18$.

Remarques

- ☞ Un nombre peut posséder plusieurs antécédents.
Par exemple : Ici, des antécédents de 18 sont -4 et 20.
- ☞ Cependant, un nombre possède une unique image.

Méthode - Déterminer l'image d'une fonction par calcul**Énoncé :**

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g .

réponse :

$$g(x) = x^2 - 2$$

$$g(6) = 6^2 - 2$$

$$g(6) = 36 - 2$$

$$g(6) = 34$$

L'image de 6 par la fonction g est 34.

Méthode - Déterminer un antécédent par calcul**Énoncé :**

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f .

réponse :

On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.

On peut donc écrire : $f(x) = -5$

$$\text{Soit : } 2x - 3 = -5$$

On résout ainsi l'équation :

$$2x = 3 - 5$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

L'antécédent de -5 par f est donc -1.

2) Ensemble de définition

🗨️ Définition

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f dont l'ensemble de départ est noté E et l'ensemble d'arrivée F est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image dans F par f , autrement dit l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

⚠️ Attention

Les restrictions des domaines de définitions concernent les $\sqrt{\dots}$ et les $\frac{\dots}{\dots}$.

Autrement dit \sqrt{A} existe ssi $A \geq 0$ et $\frac{A}{B}$ existe ssi $B \neq 0$.

☰ Méthode - Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Enoncé :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$

2) $g : x \mapsto \frac{1}{2x}$

3) $h : x \mapsto \frac{3x-2}{x+4}$

réponse :

1) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$
 $f(x)$ existe ssi $x+1 \geq 0$
 ssi $x \geq -1$
 donc $D_f = [-1; +\infty[$

2) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{2x}$
 $g(x)$ existe ssi $2x \neq 0$
 ssi $x \neq 0$
 donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) Soit $h : x \mapsto \frac{3x-2}{x+4}$
 $h(x)$ existe ssi $x+4 \neq 0$
 ssi $x \neq -4$
 donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

IV. Représentation graphique d'une fonction

1) Construction d'une courbe

☰ Méthode - Déterminer un antécédent par calcul

Enoncé :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

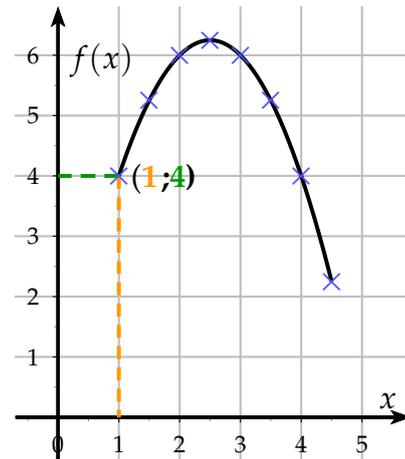
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f .

réponse :

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes. En reliant les points, on obtient une courbe.

Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.



Remarque Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$ peut se noter $y = 5x - x^2$. De façon générale, l'équation d'une courbe se note $y = f(x)$.

☰ Méthode - Vérifier si un point appartient à la courbe d'une fonction

Énoncé :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$

Vérifier que le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe de f .

réponse :

Le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe si $f(-2) = 7$.

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

Donc le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe de f .

2) Lecture graphique d'une image et d'un antécédent

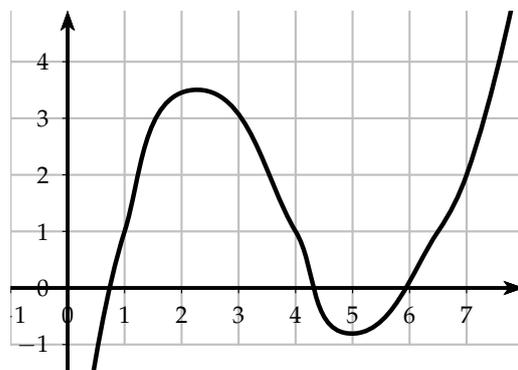
☰ Méthode - Lire graphiquement une image et un antécédent

Énoncé :

On considère la fonction f représentée ci-contre.

Déterminer graphiquement :

- 1) L'image de 7 par la fonction f .
- 2) Trois antécédents de 1 par la fonction f .



réponse :

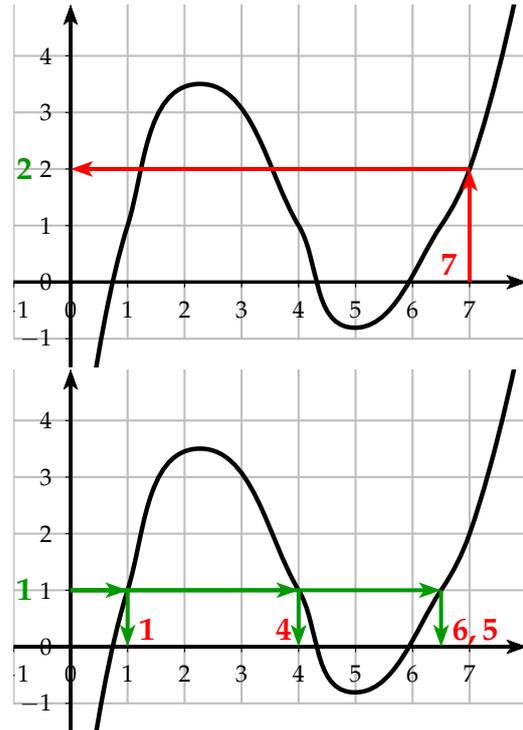
1) Pour déterminer l'image de 7, on « part » de l'abscisse 7, on « rejoint » la courbe et on lit la valeur correspondante sur l'axe des ordonnées.

On lit donc que l'image de 7 est 2.

On peut noter : $f(7) = 2$.

2) Pour déterminer des antécédents de 1, on « part » de l'ordonnée 1, on « rejoint » la courbe et on lit les valeurs correspondantes sur l'axe des abscisses. On lit donc que des antécédents de 1 sont 1, 4 et 6,5.

On peut par exemple noter : $f(4) = 1$.



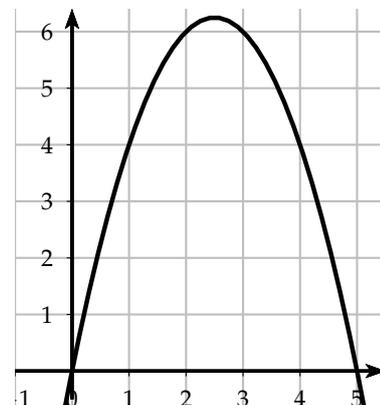
V. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

☰ Méthode - Résoudre graphiquement une équation

Énoncé :

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



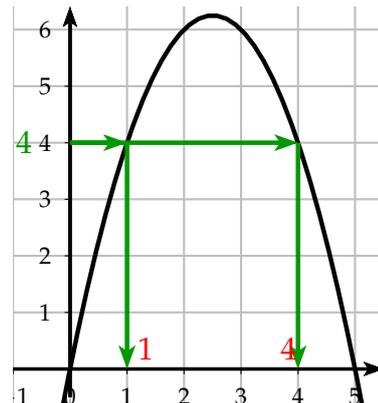
réponse :

L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.

Ce qui revient à trouver des antécédents de 4 par la fonction f .

On « part » de l'ordonnée 4, on « rejoint » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.

On peut noter : $S = \{1; 4\}$.

**Remarques**

- ☞ Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- ☞ L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- ☞ Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Méthode - Résoudre graphiquement une inéquation**Énoncé :**

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

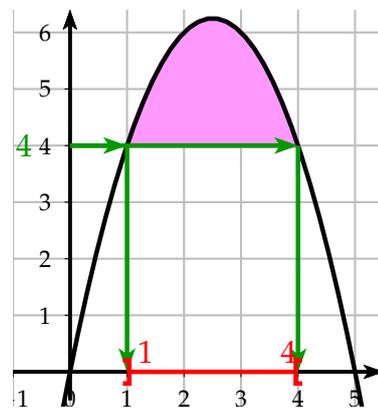
réponse :

L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f(x) > 4$

Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4. On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :

x est strictement compris entre 1 et 4 .

On peut noter : $S =]1; 4[$

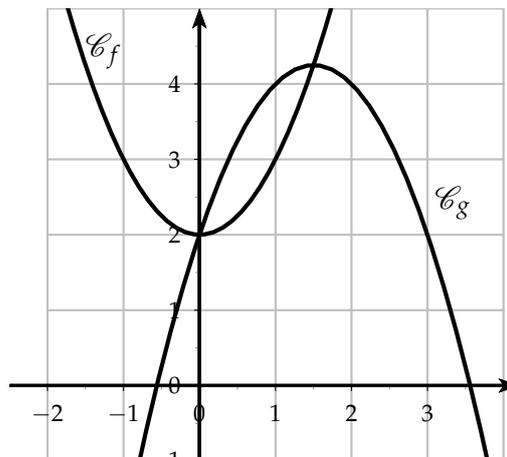


☰ Méthode - Résoudre une équation ou une inéquation du type : $f(x) = g(x), f(x) < g(x)$
Énoncé :

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 2 \text{ et } g(x) = -x^2 + 3x + 2$$

- 1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
- 2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

**réponse :**

- 1) $f(x) = g(x)$ lorsque les courbes se croisent. Il suffit de lire l'abscisse des points d'intersection des deux courbes.

On lit les solutions sur l'axe des abscisses : 0 et 1,5.

On peut noter : $S = \{0; 1,5\}$.

- 2) $f(x) < g(x)$ lorsque la courbe de g se trouve au-dessus de la courbe de f . On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses : l'intervalle $]0; 1,5[$. On peut noter : $S =]0; 1,5[$.

Les valeurs 0 et 1,5 sont exclues de l'ensemble des solutions car dans l'inéquation $f(x) < g(x)$ l'inégalité est stricte.

