Chapitre 3

Équations du second degré

I. Résolution d'une équation du second degré

1) Résoudre une équation à l'aide du discriminant

Définition

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple : L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Remarque Résoudre l'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ ou trouver les racines du trinôme $3x^2 - 6x - 2$ sont deux énoncés identiques.

Définition

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Méthode - Résoudre une équation du second degré

Enoncé : Résoudre les équations suivantes :

1) $2x^2 - x - 6 = 0$
2) $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0.$
3) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Réponse :

1) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:
$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

2) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:
$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.
Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une solution unique :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

3) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:
$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

2) Résoudre une équation à l'aide de la somme et du produit des racines

Propriété

La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Démonstration

- $S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $P = x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})\times(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Méthode - utiliser somme et produit pour trouver les 2 racines

Enoncé :
Trouver les 2 racines du polynôme suivant : $2x^2 + 3x - 5$
Réponse :
On a une solution évidente ($x_1 = 1$). Or la somme des 2 racines vaut $S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$. Donc :
$x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \iff 1 + x_2 = -\frac{3}{2} \iff x_2 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

Remarque Quant on a des équations du second degré avec $a = 1$ (donc du type $x^2 + \ldots = 0$) on retrouve directement la somme et le produit car l'équation s'écrit $x^2 - Sx + P = 0$.

II. Factorisation d'un trinôme

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 racine unique du trinôme.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les 2 racines du trinôme..

Remarque Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode - Factoriser un trinôme

Enoncé : Factoriser les trinômes suivants

1) $4x^2 + 19x - 5$

2) $9x^2 - 6x + 1$.

Réponse :

1) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:
Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4} = \mathbf{-5}$ et $x_2 = \dfrac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

On a donc :

$$4x^2 + 19x - 5 = 4\,(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x+5)(4x-1)$$

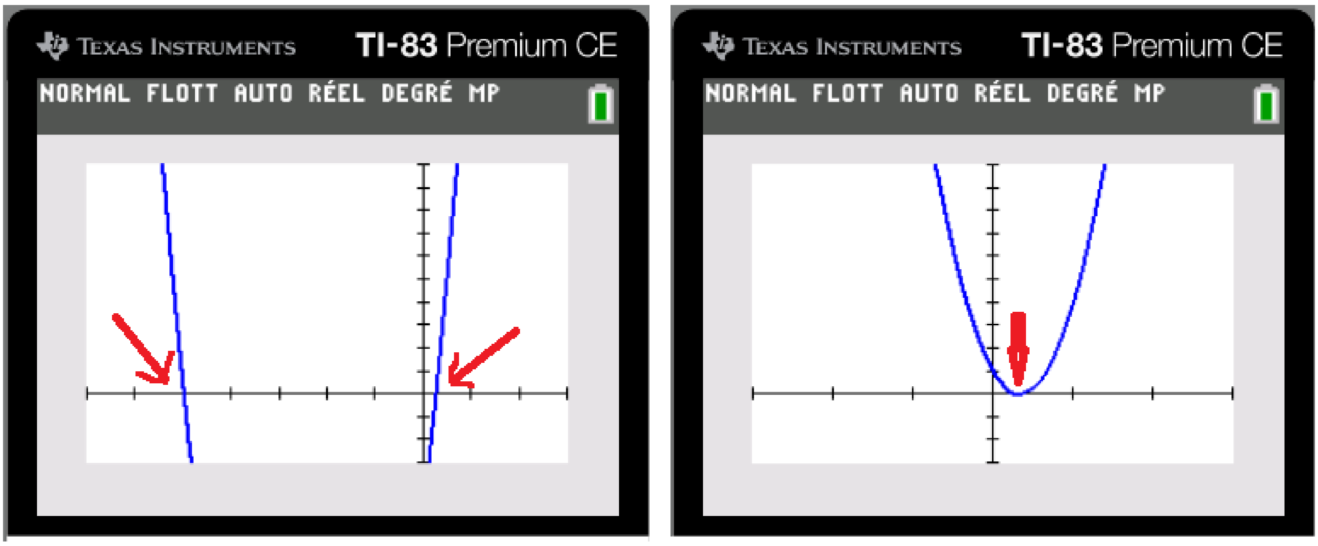
2) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:
Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine (double) est : $x_0 = -\dfrac{-6}{2 \times 9} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

On a donc :

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Remarque On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice. En traçant la courbe représentative de la fonction, on peut vérifier les racines à l'aide des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses. Ainsi en traçant les courbes précédentes, nous obtenons les courbes suivantes :



III. signe d'un trinôme

Intro

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

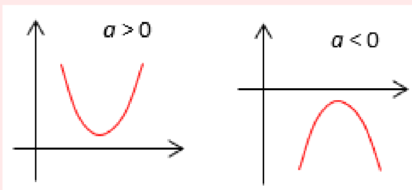
- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut.
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

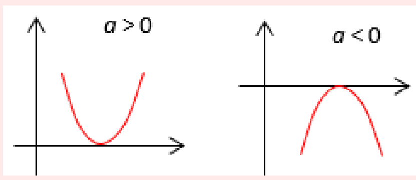
- si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	



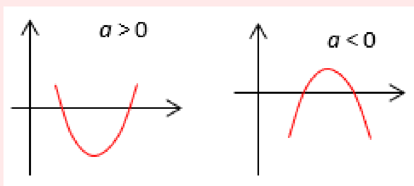
- si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	



- si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	



Méthode - Résoudre une inéquation du second degré

Enoncé : Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

Réponse :
On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.
$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.
Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 42 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :
$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $\left]-2-\sqrt{11}\,;-2+\sqrt{11}\right[$.

Remarque Comme précédement, on peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.