Correction - Exercices obligatoires
Équations du 2nd degré

Equations du second degré

Exercice 1
Pour chaque fonction trinôme f, dire si la valeur a proposée est une racine de f.

1) $f(x) = x^2 - x + 1$ et $a = 1$

$f(a) = f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 \neq 0$
1 n'est pas une racine de f

2) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ et $a = -1$

$f(a) = f(-1) = 3 \times (-1)^2 + (-1) - 2 = 0$
-1 est une racine de f.

3) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ et $a = 2$

$f(a) = f(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 2 = 0$
2 est une racine de f.

4) $f(x) = -2x^2 + x + 1$ et $a = 3$

$f(a) = f(3) = -2 \times 3^2 + 3 + 1 = -14 \neq 0$
3 n'est pas une racine de f

Exercice 2
Calculer le discriminant de chaque trinôme et donner le nombre de racines du trinôme.

1) $f(x) = x^2 + x - 1$

$a = 1$ $b = 1$ et $c = -1$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$
Le discriminant est > 0, il y a 2 racines.

2) $g(x) = 2x^2 - x + 3$

$a = 2$ $b = -1$ et $c = 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$
Le discriminant est < 0, il n'y a pas de racine.

3) $h(x) = -5x^2 + 4x + 3$

$a = -5$ $b = 4$ et $c = 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-5) \times 3 = 76 > 0$
Le discriminant est > 0, il y a 2 racines

4) $j(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 7$

$a = 1$ $b = \sqrt{2}$ et $c = 7$
$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 7 = -26 < 0$
Le discriminant est < 0, il n'y a pas de racine.

Exercice 3 - Equations Resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$
- **Racines** : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$
- $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

2) $x^2 - 2x - 8 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$
- **Racines** : $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$
- $x_1 = 4$, $x_2 = -2$

3) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$
- **Racines** : $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} = \dfrac{-5 \pm 7}{4}$
- $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -3$

4) $x^2 - 2x + 1 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$
- **Racine double** : $x = \dfrac{2}{2} = 1$

5) $2x^2 - 4x + 8 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 8 = -48$
- **Pas de racines réelles**

6) $9x^2 + 24x + 16 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 24^2 - 4 \times 9 \times 16 = 0$
- **Racine double** : $x = \dfrac{-24}{18} = -\dfrac{4}{3}$

7) $-5x^2 + 9x + 2 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 9^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 121$
- $x_1 = -\dfrac{1}{5}$, $x_2 = 2$

8) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 16$
- **Racines** : $x = \dfrac{8 \pm 4}{8}$
- $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$

9) $3x^2 + 4x + 5 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44$
- **Pas de racines réelles**

10) $-3x^2 + 11x + 4 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 11^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 169$
- $x_1 = -\dfrac{1}{3}, x_2 = 4$

11) $2x^2 - 2x - 3 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 28$
- **Racines** : $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{28}}{4} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

12) $x^2 - 2x - 2 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$
- **Racines** : $x = 1 \pm \sqrt{3}$

13) $2x^2 + 4x + 2 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$
- **Racine double** : $x = -1$

14) $-3x^2 + 4x + 2 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 40$
- **Racines** : $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$

15) $3x^2 + 12x - 15 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times (-15) = 324$
- **Racines** : $x = \dfrac{-12 \pm 18}{6}$
- $x_1 = 1, x_2 = -5$

16) $7x^2 - x - 2 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 7 \times (-2) = 57$
- **Racines** : $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{14}$

Exercice 4 - Equations Resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x^2 - 3 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 12$
- **Racines** : $x = \pm\dfrac{\sqrt{12}}{2} = \pm\sqrt{3}$

OU
$x^2 = 3$
Equation du type $x^2 = a$
$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

2) $x - 3x^2 = 0$

$x(1 - 3x) = 0$
EPN
$x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

3) $2x^2 + 5 = 0$

$\iff x^2 = -\dfrac{5}{2}$
un carré est toujours positif

$S = \varnothing$

4) $4x^2 + 8x - 12 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-12) = 208$
- **Solutions** : $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{208}}{8} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

5) $x^2 = 3x + 1$

Équation : $x^2 - 3x - 1 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13$
- **Solutions** : $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

6) $9(x+1)^2 - (2x+3)^2 = 0$

On développe
$9x^2 + 18x + 9 - (4x^2 + 12x + 9) = 0$
$5x^2 + 6x = 0$
$\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 0 = 36$
$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{36}}{10} = -\dfrac{6}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{36}}{10} = 0$

OU On factorise
$[3(x+1) - (2x+3)][3(x+1) + (2x+3)] = 0$
$x(5x+6) = 0$
EPN
$x = 0$ ou $x = -\dfrac{6}{5}$

7) $5x(2-3x) = 4 - 9x^2$

$5x(2-3x) - 4 + 9x^2 = 0$
$-6x^2 + 10x - 4 = 0$
$\Delta = 10^2 - 4 \times (-6) \times (-4) = 4$
$x_1 = \dfrac{-10 - \sqrt{4}}{-12} = 1$ ou $x_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{4}}{-12} = \dfrac{2}{3}$

8) $12x^2 + 12x + 3 = 0$

- **Discriminant** : $\Delta = 12^2 - 4 \times 12 \times 3 = 0$
- **Racine double** : $x = -\dfrac{1}{2}$

OU $12x^2 + 12x + 3 = 0 \iff 3(4x^2 + 4x + 1) = 0 \iff 3(2x+1) = 0$
EPN
$x = -\dfrac{1}{2}$

Somme et produit de racines

Exercice 5 - Somme et produits de racines Les trinômes suivants admettent tous des racines réelles. Donner dans chaque cas la somme et le produit de ces racines.

1) $f(x) = x^2 - x - 2$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-1}{1} = 1$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{1} = -2$

2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{1} = -3$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$

3) $f(x) = -x^2 + 5x + 2$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{5}{-1} = 5$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{-1} = -2$

4) $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{2}$
- $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2}$

5) $f(x) = -3x^2 + 11x + 7$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{11}{-3} = \dfrac{11}{3}$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{-3} = -\dfrac{7}{3}$

6) $f(x) = 9x^2 + x - 1$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{9}$
- $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{9}$

7) $f(x) = -x^2 - \sqrt{2}x + 3$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{-1} = -3$

8) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 2x - 1$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9) $f(x) = -\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{5}x + 1$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-3\sqrt{5}}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{15}$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

10) $f(x) = 5x^2 + \pi x - 3$

- $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{\pi}{5}$
- $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{5}$

Exercice 6 - racine évidente

Pour chaque équation, déterminer une solution évidente et en déduire l'autre sans calculer le discriminant.

1) $2x^2 + x - 3 = 0$

racine évidente $x_1 = 1 : 2 \times 1^2 + 1 - 3 = 0$
$P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{2} \iff x_1 \times x_2 = -\dfrac{3}{2} \iff 1 \times x_2 = -\dfrac{3}{2} \iff x_2 = -\dfrac{3}{2}$

2) $3x^2 + 10x + 7 = 0$

racine évidente $x_1 = -1 : 3 \times (-1)^2 + 10 \times (-1) + 7 = 0$
$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{3} \iff x_1 \times x_2 = \dfrac{7}{3} \iff -1 \times x_2 = \dfrac{7}{3} \iff x_2 = -\dfrac{7}{3}$

3) $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

racine évidente $x_1 = -\sqrt{3} : (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1) \times (-\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 0$
$P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{\sqrt{3}}{1} \iff x_1 \times x_2 = -\sqrt{3} \iff -\sqrt{3} \times x_2 = -\sqrt{3} \iff x_2 = 1$

4) $x^2 + 4\sqrt{5}x - 25 = 0$

racine évidente $x_1 = \sqrt{5} : (\sqrt{5})^2 + 4\sqrt{5} \times \sqrt{5} - 25 = 0$
$P = \dfrac{c}{a} = -25 \iff x_1 \times x_2 = -25 \iff \sqrt{5} \times x_2 = -25 \iff x_2 = -5\sqrt{5}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes, sans utiliser le discriminant :

1) $(x + 3)(7x - 2) = 0$

EPN $x + 3 = 0$ ou $7x - 2 = 0$
$x = -3$ ou $x = \dfrac{2}{7}$

2) $8x^2 - 2 = 0$

$8x^2 = 2$ $x^2 = \frac{1}{4}$
Equation du type $x^2 = a$
$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

3) $t^2 + 100 = 0$

$t^2 = -100$
un carré est toujours positif
$S = \varnothing$

4) $4x^2 - 5x = 0$

$x(4x-5) = 0$
EPN
$x = 0$ ou $x = \frac{5}{4}$

5) $4z^2 + 4z + 1 = 0$

I.R.
$(2z+1)^2 = 0$
$z = -\frac{1}{2}$

6) $(6m-4)^2 = (7-m)^2$

$(6m-4)^2 - (7-m)^2 = 0$
IR
$[(6m-4) - (7-m)][(6m-4) + (7-m)] = 0$
$(7m-11)(5m+3) = 0$
EPN
$m = \frac{11}{7}$ ou $m = -\frac{3}{5}$

Factorisation

Exercice 8
Factoriser, si possible, les trinômes suivants.

1) $f(x) = x^2 - 6x - 7$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7) \\ &= 36 + 28 \\ &= 64\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{64}}{2} = \frac{6-8}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{64}}{2} = \frac{6+8}{2} = 7$$

$$f(x) = (x+1)(x-7)$$

2) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 \\ &= 4 + 32 \\ &= 36\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2 \times (-1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{-2+6}{2 \times (-1)} = -2$$

$$f(x) = -(x-4)(x+2)$$

3) $f(x) = -3x^2 + 5x + 2$

$$\begin{aligned}\Delta &= 5^2 - 4 \times (-3) \times 2 \\ &= 25 + 24 \\ &= 49\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2 \times (-3)} = \frac{-5-7}{-6} = 12$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2 \times (-3)} = \frac{-5+7}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = -3(x-12)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

4) $f(x) = 3x^2 + x + 4$

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times 3 \times 4 \\ &= 1 - 48 \\ &= -47\end{aligned}$$

Pas de factorisation possible dans $\mathbb{R}$

5) $f(x) = -4x^2 + 28x - 49$

$$\begin{aligned}\Delta &= 28^2 - 4 \times (-4) \times (-49) \\ &= 784 - 784 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{-28}{2 \times (-4)} = \frac{7}{2}$$

$$f(x) = -4\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

6) $f(x) = x^2 - x - 1$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Signe d'un trinôme et inéquations

Exercice 9

Dans chaque cas, déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = (x-1)(x+1)$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) $f(x) = -3x^2 + x$

$f(x) = x(-3x+1)$

$a = -3 < 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) $f(x) = -4(x+6)(x-7)$

$x_1 = -6$ et $x_2 = 7$

$a = -4 < 0$

x	$-\infty$		-6		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) $f(x) = -3x^2 + 8x + 11$

5) $f(x) = 9x^2 - 8x + 2$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 9 \times 2 = 64 - 72 = -8 < 0$

pas de racines

$a = 9 > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

6) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$
$x_0 = -\dfrac{-4}{2 \times 4} = \dfrac{1}{2}$
$a = 4 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

7) $f(x) = 4x^2 - 4x - 1$

8) $f(x) = -3x^2 + 5x + 2$

$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 49$
$x_1 = \dfrac{-5-7}{-6} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{-6} = -\dfrac{1}{3}$
$a = -3 < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 10
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $x^2 - 3x + 1 < 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$
$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

S=$\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$

2) $2x^2 + 5x - 7 \geqslant 0$

$\Delta = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 81 = 9^2$
$x_1 = \dfrac{-5-9}{4} = -\dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5+9}{4} = 1$
$a = 2 > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

S=$\left]-\infty ; -\dfrac{7}{2}\right] \cup [1 ; +\infty[$

3) $9x^2 + 12x + 4 > 0$

$\Delta = (12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0$
$x_0 = \dfrac{-12}{2 \times 9} = -\dfrac{2}{3}$
$a = 9 > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

S=$\left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$
ou
$S = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

4) $3x^2 - x + 1 \leqslant 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11 < 0$
$a = 3 > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

S=$\varnothing$

5) $-x^2 + 5x - 7 < 0$

6) $-4x^2 + 20x - 25 \geqslant 0$

7) $x^2 + 1 < 0$

$\Delta = (0)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$
$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

S=$\varnothing$

8) $-5x^2 > (-3x+1)(x+2)$*

$-5x^2 - (-3x+1)(x+2) > 0$
$-5x^2 + 3x^2 + 6x - x - 2 > 0$
$-2x^2 + 5x - 2 > 0$
$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 9 = 3^2 > 0$
$x_1 = \dfrac{-5-3}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2}$
$a = -2 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

S=$\varnothing$

9) $-x^2 - 5x \leqslant 0$

10) $(x-1)\left(x^2+3\right) > (x+1)(5x-3)$

$(x-1)\left(x^2+3\right) - (x+1)(5x-3) > 0$
$x^3 + 3x - x^2 - 3 - (5x^2 - 3x + 5x - 3) > 0$
$x^3 - 6x^2 + x > 0$
$x(x^2 - 6x + 1) > 0$
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0$
$x_1 = \dfrac{6-\sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$
$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		0		$3-2\sqrt{2}$		$3+2\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-6x+1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(x^2-6x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

S$=\left]0;3-2\sqrt{2}\right[\cup \left]3+2\sqrt{2};+\infty\right[$

11) $4(x-3)^2 \geqslant (7+4x)^2$

$4(x-3)^2 - (7+4x)^2 \geqslant 0$
$(2(x-3) - (7+4x))(2(x-3) + (7+4x)) \geqslant 0$
$(-2x-13)(6x+1) \geqslant 0$
$\Delta > 0$
$x_1 = -\dfrac{13}{2}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{6}$
$a = -12 < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{13}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

S$=\left[-\dfrac{13}{2};-\dfrac{1}{6}\right]$

Exercice 11
Résoudre les inéquations suivantes après avoir donné l'ensemble de résolution.

1) $x^3 - 4x^2 + x \geqslant 0$

2) $\dfrac{3x^2+x-2}{x-2} < 0$

3) $\dfrac{-2x^2-5x+3}{x^2-4x-5} < 0$

4) $\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-5x+7} < 0$

5) $\dfrac{-x+4}{3x-5} \geqslant \dfrac{2x-1}{4x+5}$

6) $1 + \dfrac{2}{3x+1} < \dfrac{1}{x-5}$

Problème

Exercice 12 - En Physique Lors d'un freinage d'urgence, la distance que parcourt le véhicule avant l'arrêt total se décompose en deux parties : la distance parcourue pendant le temps de réaction du conducteur et la distance de freinage parcourue au cours du freinage du véhicule.

1) Le temps de réaction du conducteur, c'est-à-dire le temps nécessaire pour prendre conscience de la situation et appuyer sur le frein, est d'environ une seconde. Si on appelle v la vitesse du véhicule en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, montrer que la distance d_r, en mètre, parcourue pendant ce temps de réaction vérifie : $d_r = \dfrac{v}{3,6}$.

On utilise la formule $d = \dfrac{v}{t}$ en mettant la vitesse en $m.s^{-1}$ (on multiplie par 1000 et on divise par 3600 pour passer de $km.h^{-1}$ à $m.s^{-1}$). On remplace t par 1 (le temps de réaction). On retrouve alors : $d_r = \dfrac{v}{3,6}$

2) Pour la distance de freinage d_f, exprimée en mètre, on donne la formule suivante $d_f = \dfrac{v^2}{200}$. La distance d'arrêt est donc égale à $d_a = d_r + d_f$. Une voiture roule à 110 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Quelle est sa distance d'arrêt (on arrondira au centième près) ?

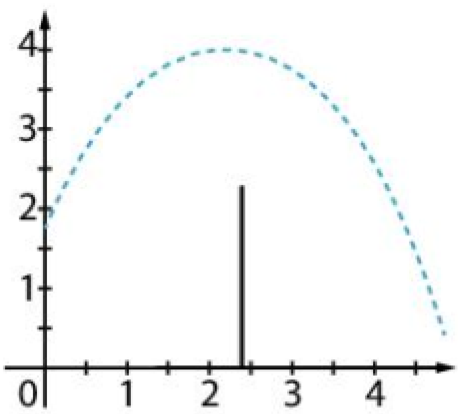
$d_a = d_r + d_f = \dfrac{v}{3,6} + \dfrac{v^2}{200} = \dfrac{110}{3,6} + \dfrac{110^2}{200} \approx 91,06\text{m}$.

3) Quelles sont les vitesses qui permettent de s'arrêter en moins de 15 m ?

On résous l'inéquation $d_a < 15m$ soit $\dfrac{v^2}{200} + \dfrac{v}{3,6} - 15 < 0$
$\Delta = \dfrac{611}{1620}$
$v_1 \approx -89,19$ et $v_2 \approx 33,64$
la fonction est négative entre les 2 racines (et $v < 0$ n'a pas de sens), il faut donc une vitesse comprise entre 0 et 33,64$km.h^{-1}$.

Exercice 13

Lors d'un entrainement de volley-ball, Thibault prend des photos en rafales pour analyser la passe de Sophia audessus du filet. II modélise la hauteur (en mètre) du ballon par la fonction $h : t \mapsto -0,49t^2 + 2,1t + 1,75$, où t est le temps (en seconde).



1) Déterminer l'écriture canonique de la fonction h.

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2,1}{2 \times (-0,49)} = \dfrac{15}{7} \approx 2,14$

$\beta = h(\alpha) = -0,49 \times \left(\dfrac{15}{7}\right)^2 + 2.1 \times \left(\dfrac{15}{7}\right) + 1,75 = 4$

$h(t) = -\dfrac{49}{100}\left(x - \dfrac{15}{7}\right)^2 + 4$

2) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de la passe représentée ?

la hauteur maximale atteinte par le ballon est de 4 m soit la valeur de β.

3) Au bout de combien de temps le ballon touche-t-il le sol ?

On va calculer la valeur de x_2.
$\Delta = b^2 - 4ac = (\frac{21}{10})^2 - 4 \times \left(-\frac{49}{100}\right) \times \frac{175}{100} = \frac{196}{25}$
$x_1 = -\frac{5}{7}$ et $x_2 = 5$
Le ballon touche le sol au bout de 5s.

4) La hauteur du filet est $2,24$ m. Pendant combien de temps le ballon est-il situé au-dessus du filet ? On arrondira au dixième de seconde.

On résous l'inéquation $h(t) \geqslant 2,24$

$$h(t) \geqslant 2,24 \iff -\frac{49}{100}t^2 + \frac{21}{10}t + \frac{7}{4} \geqslant \frac{56}{25}$$
$$\iff -\frac{49}{100}t^2 + \frac{21}{10}t - \frac{49}{100} \geqslant 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{21}{10}\right)^2 - 4 \times \frac{49}{100} \times \frac{49}{100} = \frac{2156}{625}$

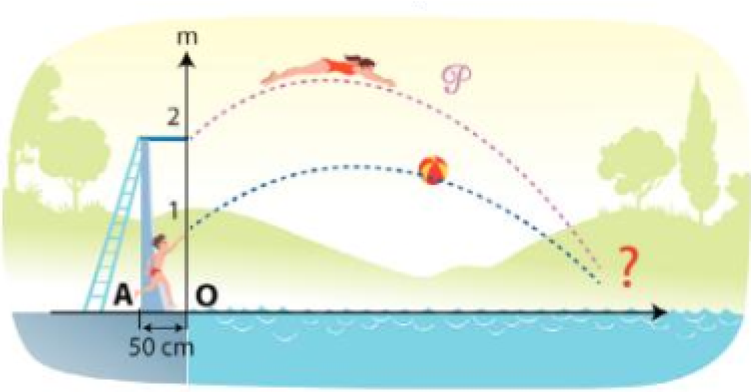
$x_1 = \frac{15 - 4\sqrt{11}}{7}$ et $x_2 = \frac{15 + 4\sqrt{11}}{7}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$h(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le ballon reste au-dessus du filet entre x_1 et x_2 soit pendant $\frac{8\sqrt{11}}{7}$

Exercice 14

Emma est à la piscine. Elle plonge de 2 m de haut. La trajectoire de son plongeon (hauteur en m en fonction de la distance horizontale parcourue en m) est représentée, dans un repère orthonormé, par un arc de parabole P admettant pour sommet le point S de coordonnées $(1; 2,4)$. On arrondira les distances au cm près.



1) Déterminer une équation de P.

On connait $\alpha = 1$ et $\beta = 2,4$ donc :
$P(x) = a(x-1)^2 + 2,4$
De plus le point de départ a pour coordonnées $(0; 2)$ donc quand $x = 0$, $P(x) = 2$
$2 = a(0-1)^2 + 2,4 \iff a = -0,4$
finalement : $P(x) = -0,4(x-1)^2 + 2,4$

2) À quelle distance du pied du plongeoir A Emma va-t-elle toucher l'eau ?

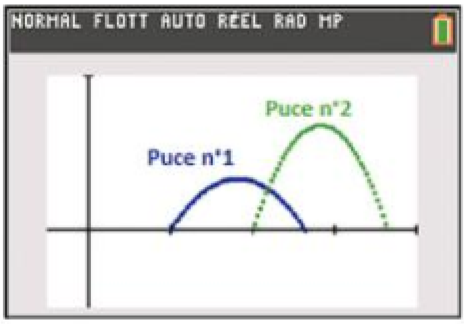
On cherche x_2
$P(x) = -0,4(x-1)^2 + 2,4 = -0,4x^2 + 0,8x + 2$
$\Delta = 0,8^2 - 4 \times (-0,4) \times 2 = 3,84 = \dfrac{96}{25}$
$x_1 = \dfrac{-0,8 - \sqrt{3,84}}{-0,8} = 1 - \sqrt{6}$ $\sqrt{\left(\dfrac{96}{25}\right)} = \dfrac{\sqrt{16 \times 6}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{5} = 0,8\sqrt{6}$
$x_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3,45m$

3) Son frère Damien lui propose un jeu : lors du plongeon d'Emma, Damien lui lance une balle et elle essaie de l'attraper. Si la balle a une trajectoire parabolique d'équation $y = -0,25x^2 + 0,6x + 1$ et en admettant qu'Emma réalise le même plongeon que celui représenté, a-t-elle une chance d'attraper la balle ? Si oui, à quelle hauteur (par rapport au niveau de l'eau) ?

$P(x) = -0,25x^2 + 0,6x + 1$
$-0,4x^2 + 0,8x + 2 = -0,25x^2 + 0,6x + 1$
$-0,15x^2 + 0,2x + 1 = 0$
$\Delta = \dfrac{16}{25}$
$x_1 = -2$ et $x_2 = \dfrac{10}{3} \approx 3,33$
Emma attrape la balle a 3,33 m du bord alors qu'elle touche l'eau à 3,45 m du bord. Elle l'attrape donc avant d'être dans l'eau.
$P\left(\dfrac{10}{3}\right) = -0,4 \times \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 + 0,8 \times \dfrac{10}{3} + 2 = \dfrac{2}{9} \approx 0,22$
Emma attrape la balle à 22 cm du niveau de l'eau.

Exercice 15

Deux puces font chacune un saut. Le saut de la puce n°1 est modélisé par l'arc de parabole d'équation $y = -0,5x^2 + 1,82x - 1,32$.
Le saut de la puce n°2 est modélisé par l'arc de parabole d'équation $y = -x^2 + 5,65x - 7,63$.



1) Est-il vrai que la hauteur maximale du saut de la puce $n°2$ est supérieure au double de celle du saut de la puce $n°1$?

2) Laquelle des deux puces a effectué le saut le plus long ?