

## Chapitre 5

# Expressions algébriques

## Correction exercices facultatifs

**Exercice 1 - Développer et réduire :**

1)  $A = (x + 5)(x + 2)$

$$A = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

2)  $B = (y + 5)(3y - 2)$

$$B = 3y^2 - 2y + 15y - 10 = 3y^2 + 13y - 10$$

3)  $C = (x + 3)^2$

$$C = x^2 + 6x + 9$$

4)  $D = (6a - 3a^2) - (8a^2 + 7a - 6) - (12 - 8 + 3a^2)$

$$D = 6a - 3a^2 - 8a^2 - 7a + 6 - 12 + 8 - 3a^2$$
$$D = -14a^2 - a + 2$$

5)  $E = 7(5x - 3) - 4(3x^2 - 1) - 2x(3x + 7)$

$$E = 35x - 21 - 12x^2 + 4 - 6x^2 - 14x$$
$$E = -18x^2 + 21x - 17$$

6)  $F = (3y - 4)(4y - 3) - (-11y - 3)(-2y + 5)$

$$F = 12y^2 - 9y - 16y + 12 - 22y^2 + 55y - 6y + 15$$
$$F = -10y^2 + 24y + 27$$

**Exercice 2 - Factoriser :**

1)  $A = x(x - 2) + (x - 1)x$

$$A = x \left[ (x - 2) + (x - 1) \right] = x(2x - 3)$$

2)  $B = 2x(x + y) + 4x(y^2 + 1)$

$$B = 2x \left[ (x + y) + 2(y^2 + 1) \right] = 2x(2y^2 + x + y + 2)$$

3)  $C = 9x^2 - 48x + 64$

$$C = (7 - m) \left[ (m + 1) - (3m - 1) \right] = (7 - m)(-2m + 2) = 2(7 - m)(1 - m)$$

4)  $D = (2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 5)$

$$D = (2x + 3) \left[ (2x + 3) - (x - 5) \right] = (2x + 3)(x + 8)$$

5)  $E = 30x + 45$

$$E = 15 \times 2x + 15 \times 3 = 15(2x + 3)$$

6)  $F = 8x^2 - 2x$

$$F = 2x \times 4x - 2x \times 1 = 2x(4x - 1)$$

7)  $G = 4 + 20x + 25x^2$

$$G = (2 + 5x)^2$$

8)  $H = 81 - 36x^2$

$$H = (9 - 6x)(9 + 6x)$$

9)  $I = (7 - m)(m + 1) - (7 - m)(3m - 1)$

$$I = (3x)^2 - 48x + 8^2 = (3x - 8)^2$$

10)  $J = (7m - 5)^2 - (7m - 5)$

$$J = (7m - 5)^2 - (7m - 5) \times 1 = (7m - 5)(7m - 5 - 1) = (7m - 5)(7m - 6)$$

11) \*\*  $K = (2x - 3)(4x + 2) - (-2x + 3)(7x - 6)$

$$K = (2x - 3)(4x + 2) + (2x - 3)(7x - 6) = (2x - 3) \left[ (4x + 2) + (7x - 6) \right] = (2x - 3)(11x - 4)$$

12) \*\*  $L = (4x - 6)(3x + 7) - (2x - 3)(8x + 3)$

$$L = 2(2x - 3)(3x + 7) - (2x - 3)(8x + 3) = (2x - 3) \left[ 2(3x + 7) - (8x + 3) \right] = (2x - 3)(-2x + 11)$$

13) \*\*  $M = 25x^2 - 9 + (5x - 3)(7x + 8)$

$$M = (5x)^2 - 3^2 + (5x - 3)(7x + 8) = (5x - 3)(5x + 3) + (5x - 3)(7x + 8) = (5x - 3) \left[ (5x + 3) + (7x + 8) \right] = (5x - 3)(12x + 11)$$

### Exercice 3 - Développer une identité remarquable :

1)  $A = (x + 11)^2$

$$A = x^2 + 22x + 121$$

$$B = 9x^2 - 42x + 19$$

2)  $B = (3x - 7)^2$

3)  $C = \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right)$

$$C = x^2 - \frac{4}{9}$$

$$4) D = (5x - 9)(5x + 9)$$

$$D = 25x^2 - 81$$

$$5) *E = (2x - 1,5)^2$$

$$E = 4x^2 - 6x + 2,25$$

$$6) F = (x + \sqrt{2})^2$$

$$F = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

#### Exercice 4 - Factoriser une identité remarquable :

$$1) A = 16x^2 - 4900$$

$$2) *B = 6,25 + x^2 - 5x$$

$$3) C = 9x^2 + 6x + 1$$

$$4) D = x^2 - 8x + 16$$

$$5) E = 9x^2 - 6x + 1$$

$$6) *F = z^2 - z + \frac{1}{4}$$

$$7) G = 25 + 25x^2 - 50x$$

$$8) H = a^2 - 144$$

$$9) I = 9x^2 - 16$$

$$10) J = \frac{x^2}{4} - \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} 1) A &= 16x^2 - 4900 \\ &= (4x)^2 - 70^2 \\ &= (4x - 70)(4x + 70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) *B &= 6,25 + x^2 - 5x \\ &= x^2 - 5x + 6,25 \\ &= (2,5 - x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) C &= 9x^2 + 6x + 1 \\ &= (3x)^2 + 6x + 1 \\ &= (3x + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) D &= x^2 - 8x + 16 \\ &= (x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) E &= 9x^2 - 6x + 1 \\ &= (3x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) *F &= z^2 - z + \frac{1}{4} \\ &= z^2 - 2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) G &= 25 + 25x^2 - 50x \\ &= 25x^2 - 50x + 25 \\ &= (5x)^2 - 2 \times 5 \times 5x + 5^2 \\ &= (5x - 5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) H &= a^2 - 144 \\ &= (a + 12)(a - 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) I &= 9x^2 - 16 \\ &= (3x + 4)(3x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) J &= \frac{x^2}{4} - \frac{4}{9} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

#### Exercice 5 - équations du 1er degré

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations.

$$1) 3x + 13 = 5x + 1;$$

$$\begin{aligned}3x + 13 &= 5x + 1 \\3x - 5x + 13 - 13 &= 5x - 5x + 1 + -13 \\-2x &= -12 \\\frac{-2x}{-2} &= \frac{-12}{-2} \\x &= 6 \\S &= \{6\}\end{aligned}$$

2)  $-7x + 2 = -2x - 18;$

$$\begin{aligned}-7x + 2 &= -2x - 18 \\-7x + 2x + 2 - 2 &= -2x + 2x - 18 + 2 \\-5x &= -17 \\\frac{-5x}{-5} &= \frac{-17}{-5} \\x &= \frac{17}{5} \\S &= \left\{ \frac{17}{5} \right\}\end{aligned}$$

3)  $5(x - 13) = 7(x + 1);$

$$\begin{aligned}5(x - 13) &= 7(x + 1) \\5x - 65 &= 7x + 7 \\5x - 7x - 65 + 65 &= 7x - 7x + 7 + 65 \\-2x &= 72 \\\frac{2x}{-2} &= \frac{72}{-2} \\x &= -36 \\S &= \{-36\}\end{aligned}$$

4)  $-4(x - 3) = -3(x + 12);$

$$\begin{aligned} -4(x - 3) &= -3(x + 12) \\ -4x + 12 &= -3x - 36 \\ -4x + 3x + 12 - 12 &= -3x + 3x - 36 - 12 \\ -x &= -48 \\ x &= 48 \\ S &= \{48\} \end{aligned}$$

5)  $-1,5x - 0,7 = 0,9$ ;

$$\begin{aligned} -1,5x - 0,7 &= 0,9 \\ -15x - 7 &= 9 \\ -15x - 7 + 7 &= 9 + 7 \\ -15x &= 16 \\ \frac{-15x}{-15} &= \frac{16}{-15} \\ x &= -\frac{16}{15} \\ S &= \left\{ -\frac{16}{15} \right\} \end{aligned}$$

6)  $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$ ;

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} &= \frac{3}{4}x + \frac{2}{3} \\ -4x + \frac{6}{5} &= \frac{9}{4}x + 2 \\ -20x + 6 &= \frac{45}{4}x + 10 \\ -80x + 24 &= 45x + 40 \\ -80x - 45x + 24 - 24 &= 45x - 45x + 40 - 24 \\ -35x &= 16 \\ \frac{-35x}{-35} &= \frac{16}{-35} \\ x &= -\frac{16}{35} \\ S &= \left\{ -\frac{16}{35} \right\} \end{aligned}$$

**Exercice 6 - équations du 2nd degré**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations.

1)  $(5x + 2)(-2x + 14) = 0;$

EPN : Si  $a \times b = 0$  alors  $a = 0$  ou  $b = 0$ 

$$\begin{array}{lll} 5x + 2 & \text{ou} & -2x + 14 = 0 \\ 5x = -2 & \text{ou} & -2x = -14 \\ x = -\frac{2}{5} & \text{ou} & x = 7 \end{array}$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{5}; 7 \right\}$$

2)  $(7 - 4x)(3x - 1) = 0;$

EPN : Si  $a \times b = 0$  alors  $a = 0$  ou  $b = 0$ 

$$\begin{array}{lll} 7 - 4x = 0 & \text{ou} & 3x - 1 = 0 \\ -4x = -7 & \text{ou} & 3x = 1 \\ x = \frac{7}{4} & \text{ou} & x = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{7}{4} \right\}$$

3)  $2x(5x + 1) + 6(5x + 1) = 0;$

$$2x(5x + 1) + 6(5x + 1) = 0$$

$$(5x + 1)(2x + 6) = 0$$

EPN : Si  $a \times b = 0$  alors  $a = 0$  ou  $b = 0$ 

$$\begin{array}{lll} 5x + 1 = 0 & \text{ou} & 2x + 6 = 0 \\ 5x = -1 & \text{ou} & 2x = -6 \\ x = -\frac{1}{5} & \text{ou} & x = -3 \end{array}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{5}; -3 \right\}$$

4)  $5(2x - 3)^3 = 5x(2x - 3)^2;$

$$5(2x - 3)^3 - 5x(2x - 3)^2 = 0$$

$$(2x - 3)^2 [5(2x - 3) - 5x] = 0$$

$$(2x - 3)^2 (5x - 15) = 0$$

EPN : Si  $a \times b = 0$  alors  $a = 0$  ou  $b = 0$

$$\begin{array}{lll}
 2x - 3 = 0 & \text{ou} & 5x - 15 = 0 \\
 2x = -3 & \text{ou} & 5x = 15 \\
 x = -\frac{3}{2} & \text{ou} & x = 3 \\
 \\ 
 S = \left\{ -\frac{3}{2}; 3 \right\}
 \end{array}$$

5)  $(5x + 3)^2 = (4x - 5)^2;$

$$\begin{array}{lll}
 (5x + 3)^2 - (4x - 5)^2 = 0 \\
 [(5x + 3) - (4x - 5)][(5x + 3) + (4x - 5)] = 0 \\
 (x + 8)(9x - 2) = 0 \\
 \text{Si } a \times b = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0 \\
 \\ 
 \begin{array}{lll}
 x + 8 = 0 & \text{ou} & 9x - 2 = 0 \\
 x = -8 & \text{ou} & 9x = 2 \\
 x = -8 & \text{ou} & x = \frac{2}{9}
 \end{array} \\
 \\ 
 S = \left\{ \frac{2}{9}; -8 \right\}
 \end{array}$$

6)  $(2x + 3)^2 = (3x - 1)^2;$

$$\begin{array}{lll}
 (2x + 3)^2 - (3x - 1)^2 = 0 \\
 [(2x + 3) - (3x - 1)][(2x + 3) + (3x - 1)] = 0 \\
 (-x + 4)(5x + 2) = 0 \\
 \text{Si } a \times b = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0 \\
 \\ 
 \begin{array}{lll}
 -x + 4 = 0 & \text{ou} & 5x + 2 = 0 \\
 -x = -4 & \text{ou} & 5x = -2 \\
 x = 4 & \text{ou} & x = -\frac{2}{5}
 \end{array} \\
 \\ 
 S = \left\{ -\frac{2}{5}; 4 \right\}
 \end{array}$$

7)  $4(3 - 2x)(-5x + 9)(-4x + 7) = 0;$

$$\begin{array}{llll}
 4(3 - 2x)(-5x + 9)(-4x + 7) = 0 \\
 \text{Si } a \times b \times c = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } c = 0 \\
 \\ 
 \begin{array}{llll}
 3 - 2x = 0 & \text{ou} & -5x + 9 = 0 & \text{ou} & -4x + 7 = 0 \\
 -2x = -3 & \text{ou} & -5x = -9 & \text{ou} & -4x = -7 \\
 x = \frac{3}{2} & \text{ou} & x = \frac{9}{5} & \text{ou} & x = \frac{7}{4}
 \end{array} \\
 \\ 
 S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{9}{5}; \frac{7}{4} \right\}
 \end{array}$$

$$8) 8(x-7)(x-5) = 4x(x-7)$$

$$8(x-7)(x-5) - 4x(x-7) = 0$$

$$4(x-7)[2(x-5) - 4x] = 0$$

$$4(x-7)(-2x-10) = 0$$

EPN : Si  $a \times b = 0$  alors  $a = 0$  ou  $b = 0$

$$x-7 = 0$$

ou

$$-2x-10 = 0$$

$$x = 7$$

ou

$$-2x = 10$$

$$x = 7$$

ou

$$x = -5$$

$$S = \{-5; 7\}$$

**Exercice 7 - Valeurs interdites** Déterminer les valeurs interdites de ces expressions :

$$1) A = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

On résout  $x+1 = 0$  et  $x-1 = 0$

On a donc  $x \neq -1$  et  $x \neq 1$  pour que les expressions existent.

$$2) B = \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3}{2x+1}$$

En résolvant de même, on trouve :  $x \neq 2$  et  $x \neq -\frac{1}{2}$  pour que les expressions existent.

$$3) C = \frac{2}{(2x-5)(6-7x)} + \frac{x+1}{x}$$

En résolvant de même, on trouve :  $x \neq 0$  et  $x \neq \frac{6}{7}$  et  $x \neq -\frac{5}{2}$  pour que les expressions existent.

**Exercice 8 - Montrer que deux expressions sont équivalentes**

$$1) \text{ Montrer que pour tout réel } x \neq 1 : \frac{4x-3}{x-1} = 4 + \frac{1}{x-1}$$

On part du membre de droite pour montrer celle de gauche (sens plus simple) :

$$\begin{aligned} & 4 + \frac{1}{x-1} \\ &= 4 \times \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{4x-4+1}{x-1} \\ &= \frac{4x-3}{x-1} \end{aligned}$$

$$2) \text{ Montrer que } 3(x-2)^2 - 5 = (3x-1)(x-7) + 10x$$

Dans cet exemple, on peut développer chaque membre SEPARÉMENT et montrer que les deux expressions obtenues sont équivalentes.



On développe le membre de gauche :

$$\begin{aligned} & 3(x-2)^2 - 5 \\ &= 3(x^2 - 4x + 4) - 5 \\ &= 3x^2 - 12x + 12 - 5 \\ &= 3x^2 - 12x + 7 \end{aligned}$$

On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned} & (3x-1)(x-7) + 10x \\ &= (3x^2 - 21x - x + 7) + 10x \\ &= 3x^2 - 12x + 7 \end{aligned}$$

On a donc  $3(x-2)^2 - 5 = 3x^2 - 12x + 7 = 3x-1)(x-7) + 10x$

Ainsi  $3(x-2)^2 - 5 = 3x-1)(x-7) + 10x$

### Exercice 9 (Additionner et soustraire des fractions)

Simplifier les écritures fractionnaires suivantes (écrire sous la forme d'une seule fraction) :

1)  $A = \frac{3}{4-7x} - 5$

$$A = \frac{3}{4-7x} - \frac{5(4-7x)}{4-7x} = \frac{3-20+35x}{4-7x} = \frac{35x-17}{4-7x}$$

2)  $B = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x+3}$

$$B = \frac{3(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{3x+9+2x+4}{(x+2)(x+3)} = \frac{5x+13}{(x+2)(x+3)}$$

3)  $C = \frac{8x-3}{2x-3} - \frac{9-2x}{5-3x}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{(8x-3)(5-3x)}{(2x-3)(5-3x)} - \frac{(9-2x)(2x-3)}{(5-3x)(2x-3)} \\ C &= \frac{40x-24x^2-15+9x-18x+27+4x^2-6x}{(2x-3)(5-3x)} \\ C &= \frac{-20x^2+19x+12}{(2x-3)(5-3x)} \end{aligned}$$

4) \*\*  $D = \frac{8x-3}{2x-3} - \frac{9-2x}{5-3x} + \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} D &= \frac{2(-20x^2+19x+12)+3(2x-3)(5-3x)}{2(2x-3)(5-3x)} \\ D &= \frac{-40x^2+38x+24+30x-18x^2-45+27x}{2(2x-3)(5-3x)} \\ D &= \frac{-58x^2+95x-21}{2(2x-3)(5-3x)} \end{aligned}$$

### Exercice 10 - Quotient nul

Résoudre les équations ci-dessous en se ramenant à un quotient nul et en excluant les valeurs interdites

1)  $\frac{3x+1}{2+6x} = 0$

On commence par chercher les valeurs interdites :

$$2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

Donc  $\frac{-1}{3}$  est une valeur interdite.

Puis un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

$$\frac{3x+1}{2+6x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

Or  $\frac{-1}{3}$  est une valeur interdite. Cette équation n'a donc pas de solution.

**Remarque :** On aurait pu se douter de la réponse en simplifiant la fraction :

$$\frac{3x+1}{2+6x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2(1+3x)} = 0 \text{ (Avec } \frac{-1}{3} \text{ valeur interdite)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0$$

On constate bien que cette équation est impossible.

$$2) \frac{(-x+5)(3x-1)}{(3x+2)(-7x-3)} = 0$$

On commence par chercher les valeurs interdites :

$$\text{On trouve } x = \frac{-2}{3} \text{ et } x = -\frac{3}{7}$$

Puis, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

$$\text{Ainsi, on a } (-x+5)(3x-1) = 0$$

C'est un produit nul.

$$-x+5 = 0 \text{ OU } 3x-1 = 0$$

$$\text{C'est à dire } x = 5 \text{ OU } x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Les solutions sont } 5 \text{ et } x = \frac{1}{3}$$

$$3) \frac{3x+1}{5-2x} = -3$$

On commence par se ramener à un quotient nul :

$$\frac{3x+1}{5-2x} = -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{5-2x} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{5-2x} + 3 \times \frac{5-2x}{5-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{5-2x} + \frac{15-6x}{5-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+16}{5-2x} = 0$$

Puis on cherche les valeurs interdites :  $x = \frac{5}{2}$  est une valeur interdite.

Puis, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Ainsi, on a  $-3x + 16 = 0$ , c'est à dire  $x = \frac{16}{3}$ .

La solution de l'équation est donc  $\frac{16}{3}$ .

4)  $\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} = 4$

On commence par se ramener à un quotient nul :

$$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \times (x-1)}{(x+3) \times (x-1)} + \frac{3 \times (x+3)}{(x-1) \times (x+3)} - 4 \times \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-5}{(x+3) \times (x-1)} + \frac{3x+9}{(x-1) \times (x+3)} - 4 \frac{(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x+4}{(x+3) \times (x-1)} - \frac{(4x^2+8x-12)}{(x+3)(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x+4 - (4x^2+8x-12)}{(x+3) \times (x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2+16}{(x+3) \times (x-1)} = 0$$

Puis on cherche les valeurs interdites :  $x = -3$  et  $x = 1$  sont des valeurs interdites.

Puis, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Ainsi, on a  $-4x^2 + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

C'est un produit nul.

Les solutions de l'équation sont  $x = 2$  et  $x = -2$ .