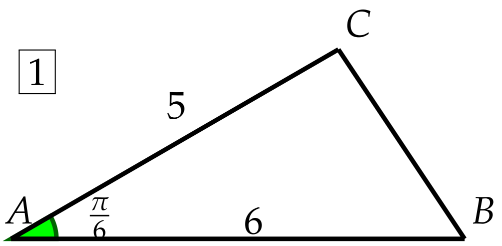
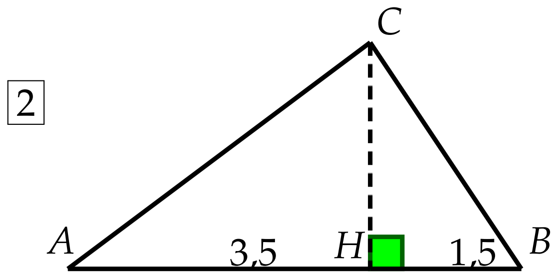
Chap. 04 - Produit scalaire
Correction - Exercices facultatifs

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide des informations données.



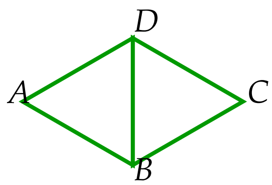


1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 6 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5 \times 3{,}5 = 17{,}5$

Exercice 2 ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux de côté 6. Calculer les produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$
2) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB}$
4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$
5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
6) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$



1) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \times CD \times CD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

2) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{1}{2} \times DC \times DC = -\frac{1}{2} \times 6 \times = -18$

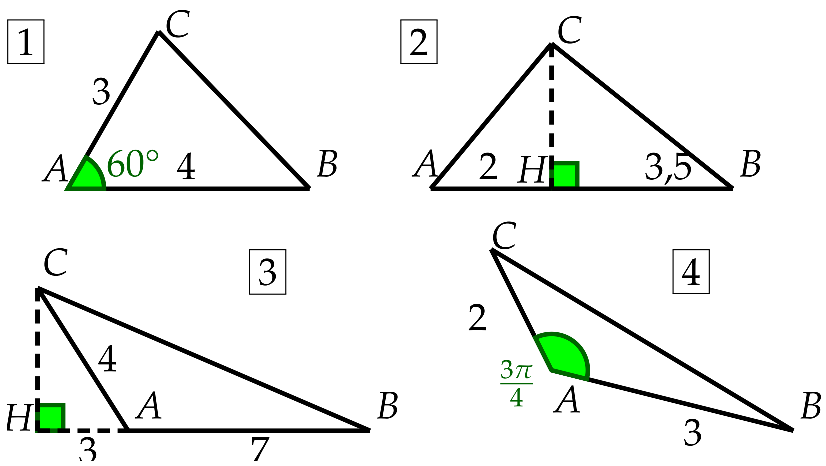
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2} DB \times DB = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux (les diagonales d'un losange se coupent $\perp$).

5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB \times AB = -6 \times 6 = -36$

6) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) = -\frac{1}{2} CA \times CA = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{27} \times 2\sqrt{27} = -54$
La moitié de la longueur CA se calcule à l'aide de Pythagore dans le triangle ADB coupé en 2 par la diagonale du losange.

Exercice 3 Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4 \times 3 \times \cos(60) = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5{,}5 \times 2 = 11$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -7 \times 3 = -21$

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 3 \times 2 \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 6 \times \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$

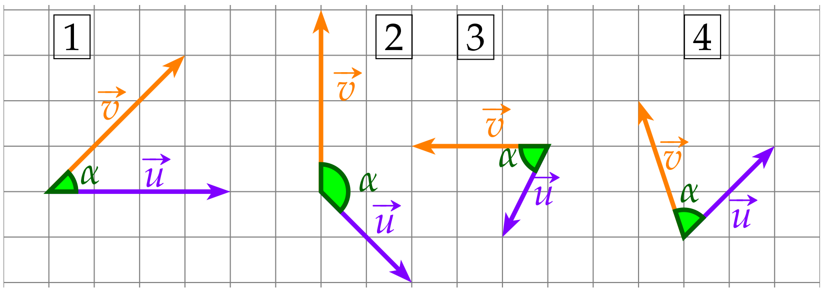
Exercice 4

1) Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

a) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2) En déduire la valeur de l'angle géométrique α.



1) a) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 = 12$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$\iff 12 = 4 \times \sqrt{18} \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \dfrac{12}{4\sqrt{18}} \iff \alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad

2) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = 4$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$\iff -8 = \sqrt{8} \times 4 \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \dfrac{-8}{4\sqrt{8}} \iff \alpha = 135° = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

3) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = 3$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 = 3$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$\iff 3 = \sqrt{5} \times 3 \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \dfrac{3}{3\sqrt{5}} \iff \alpha \approx 63{,}43°$

4) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$\iff 4 = \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \dfrac{4}{4\sqrt{5}} \iff \alpha \approx 63,43°$

Exercice 5 calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chaque cas.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-1) \times 5 = 3$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + (-3) \times \dfrac{1}{3} = -\dfrac{7}{8}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$

Exercice 6 $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan. calculer les produits scalaires suivants.

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $\boxed{= 1 \times 1 + (-3) \times (-1) = 4}$

2) $\vec{u} \cdot (-4\vec{v})$ $\boxed{= -4\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 4 = -16}$

3) $-\vec{u} \cdot (2\vec{v})$ $\boxed{= -2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8}$

4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ $\boxed{= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \sqrt{1^2 + (-3)^2}^2 - \sqrt{1^2 + (-1)^2}^2 = 10 - 2 = 8}$

Exercice 7 $A(-2;5), B(4;3)$ et $C(1;-6)$ sont trois points du plan.

1) Determiner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2-4 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-4 \\ -6-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

2) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6) \times (-3) + 2 \times (-9) = 18 - 18 = 0$

3) En déduire la nature du triangle ABC.

Comme $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et que donc $\widehat{ABC} = 90°$.
ABC est donc un triangle rectangle en B

Exercice 8 On donne $\mathrm{A}(2;-1), \mathrm{B}(0;1)$ et $\mathrm{C}(1;-2)$.

1) Calculer AB et AC.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8}$
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{2}$

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 2 \times (-1) = 0$

3) Calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90°$

Exercice 9 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4), B(6;3)$ et $C(-4;-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes pour déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{37}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{52}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-0 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4-0 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times (-4) + (-1) \times (-6) = 18$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC})$

$\iff 18 = \sqrt{37} \times \sqrt{52} \times \cos(\widehat{ABC}) \iff \cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{18}{\sqrt{37}\sqrt{52}} \iff \widehat{ABC} \approx 65,77°$

Exercice 10 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $M(2;-2)$, $N(-3;1)$ et $P(1;2)$

1) Calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} = \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = (-5) \times (-1) + 3 \times 4 = 17$

2) En déduire une valeur exacte de l'angle $\widehat{PMN}$.

$MN = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$MP = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = MN \times MP \times \cos(\widehat{PMN})$

$\iff 17 = \sqrt{34} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{PMN}) \iff \cos(\widehat{PMN}) = \dfrac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} \iff \widehat{PMN} \approx 63,26°$

Exercice 11 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1;1), B\left(\dfrac{14}{5}; \dfrac{17}{5}\right)$ et $C(5;1)$.

1) Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 1 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\dfrac{9}{5} \times 4 + \dfrac{12}{5} \times 0 = \dfrac{36}{5}$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 5 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{11}{5} \times (-4) + \frac{12}{5} \times 0 = \frac{44}{5}$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{9}{5} \times \frac{11}{5} + \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} = \frac{45}{5}$

2) Le triangle ABC est-il rectangle ?

Le triangle n'est pas rectangle car d'après les produits scalaires, nous n'avons de vecteurs orthogonaux, donc pas d'angles droits.

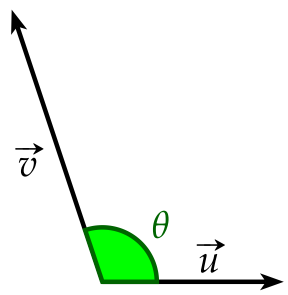
Exercice 12

On considere les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-contre.
On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Calculer les eléments suivants.

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2) $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$



1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$

2) $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 3 \times (-3) - 6 \times 3^2 = -63$

3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 2 \times (-3) + 3^2 = 7$