Chapitre 4

Vecteurs - partie 1

I. Définitions et propriété

1) Norme d'un vecteur

Définition

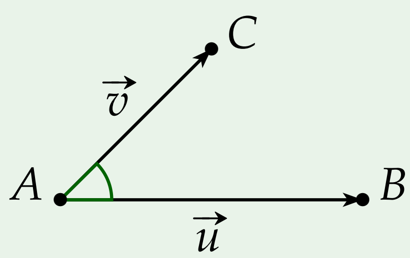
Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

2) Produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$



Remarques

- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
- Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

Méthode - calculer un produit scalaire

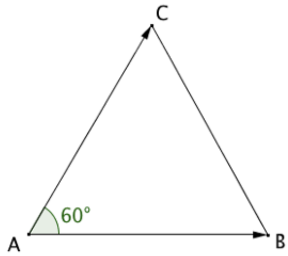
Enoncé : Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sachant que $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

Réponse :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 4\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$$

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Enoncé :
Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. Calculer, en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Réponse :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\widehat{BAC}\\&=a\times a\times\cos 60^\circ\\&=a^2\times 0,5\\&=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Démonstration

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).
$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
$=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
$=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(-(\vec{v};\vec{u}))$
$=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{v};\vec{u})=\vec{v}\cdot\vec{u}$

4) opérations sur les produits scalaires

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
2) $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\vec{u}\cdot\vec{v}$, avec k un nombre réel.

5) Identités remarquables

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
2) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration - 2ème formule :

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})^2 &= (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Démonstration

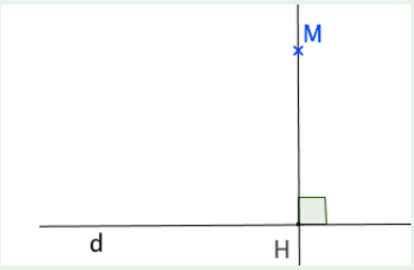
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0\\ &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}\end{aligned}$$

2) Projection orthogonale

Définition

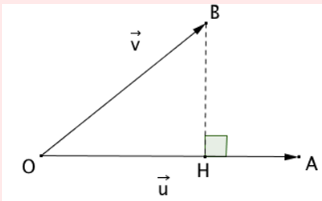
Soit une droite d et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.



Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA). On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



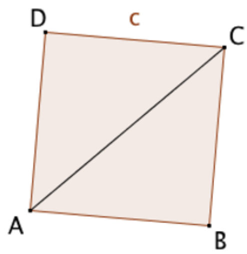
Démonstration

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$
$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode - Calculer un produit scalaire par projection

Enoncé :
Soit un carré ABCD de côté c. Calculer, en fonction de c, les produits scalaires :



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ **3)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

Réponse :

1) Par projection, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$

III. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\,(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}\\ &= xx'\|\vec{\imath}\|^2+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\|\vec{\jmath}\|^2\\ &= xx'+yy'\end{aligned}$$

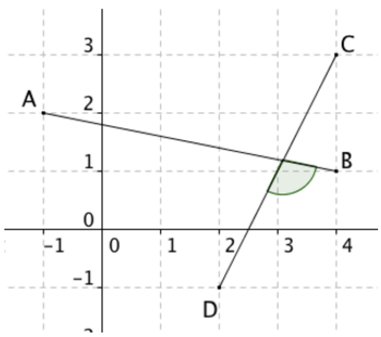
car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé, et $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Enoncé :
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$
Réponse :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times(-3)+(-4)\times 7 = -15-28 = -43$

Méthode - Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Enoncé :
Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



Réponse :
On a :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$
$= \sqrt{(4-(-1))^2+(2-1)^2}\times\sqrt{(4-2)^2+(3-(-1))^2}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$
$= \sqrt{520}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$
$= 2\sqrt{130}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5;-1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2;-4)$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 5\times(-2)+(-1)\times(-4) = -6$
On a ainsi : $2\sqrt{130}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = -6$
Et donc : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$
Et : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \approx 105,3°$