

Vecteurs

Rappels de cours

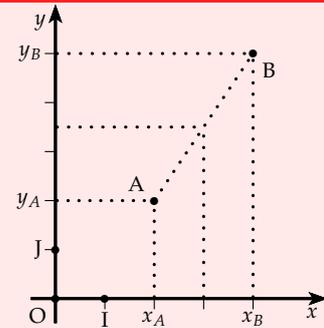
I. géométrie dans un repère

1) Milieu d'un segment

Propriété

Dans un repère **quelconque** du plan : Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.



Méthode - Milieu et parallélogramme

Rappel : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Pour montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, on montre que les 2 diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu :

- 1) On détermine les coordonnées du milieu M de la diagonale $[AC]$.
- 2) On détermine les coordonnées du milieu N de la diagonale $[BD]$.
- 3) On montre que les points M et N sont confondus et on conclut.

Pour trouver le 4ème point D d'un parallélogramme $ABCD$:

- 1) On détermine le milieu M de la diagonale $[AC]$.
- 2) On détermine le point D tel que M soit milieu de la diagonale $[BD]$.

Exemple : : Dans le repère $(O; I; J)$, on veut déterminer les coordonnées de M milieu de $[AB]$ et N milieu de $[AC]$.

Les coordonnées de A , B et C sont : $A(1; 4)$ $B(5; 2)$ $C(-2; -2)$

Les coordonnées de M milieu de $[AB]$ sont :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

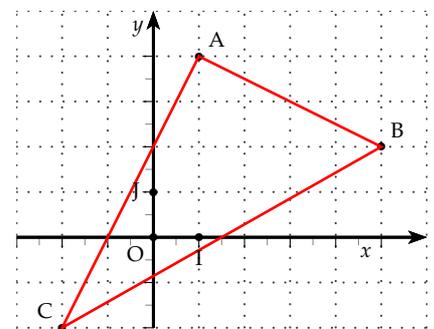
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{donc } M(3; 3).$$

Les coordonnées de N milieu de $[AC]$ sont :

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + (-2)}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

$$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{donc } N(-0,5; 1).$$

On peut le vérifier graphiquement en traçant les segments et leur milieu.



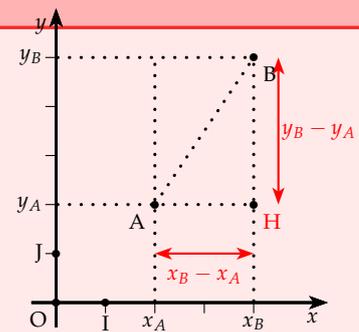
2) Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété

Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Attention : cette formule est valable uniquement si le repère est orthonormé.



Exemple : Les coordonnées de A , B et C sont : $A(1; 4)$ $B(5; 2)$ $C(-2; -2)$.

- Calculons les longueurs AB , AC et BC . Le repère (O, I, J) ci-dessus est orthonormé donc on peut utiliser la formule ci-dessus :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 5)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

- Que peut-on dire du triangle ABC ?
Il semble que ABC soit un triangle rectangle en A . **Prouvons-le :**

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{45})^2 = 20 + 45 = 65 \quad \text{et} \quad BC^2 = (\sqrt{65})^2 = 65.$$

Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A .

II. Généralités sur les vecteurs

1) Vecteur et translation

Définition

Un vecteur \overrightarrow{AB} est un outil mathématique qui matérialise la translation d'un point à un autre point. Il est défini par 3 caractéristiques :

- sa direction (son inclinaison)
- son sens (droite, gauche, haut, bas etc)
- sa norme (sa longueur) notée $\|\overrightarrow{AB}\|$

Remarque Vecteur nul : le vecteur qui matérialise la translation du point A au point A , c'est-à-dire sur lui-même, est noté $\vec{0}$ et s'appelle le vecteur nul. On a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Ce vecteur n'a ni direction ni sens, et a pour norme 0.

Définition

vecteurs égaux : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- la même direction
- le même sens
- la même norme

Définition

vecteurs opposés : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits opposés s'ils ont :

- La même direction
- La même norme

MAIS des sens opposés On note $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$

Propriété

Le vecteur opposé à \vec{AB} est le vecteur \vec{BA} : c'est-à-dire qu'il part de B pour aller vers A. On a donc : $\vec{AB} = -\vec{BA}$ ou encore $\vec{BA} = -\vec{AB}$

III. Opérations sur les vecteurs**1) Règle du parallélogramme****Propriété**

Propriété : ABCD est un parallélogramme équivaut à dire que $\vec{AB} = \vec{DC}$

2) Somme de vecteurs et relation de Chasles**Définition**

somme de vecteurs : Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan. On définit la somme $\vec{u} + \vec{v}$ comme un vecteur formé en mettant bout à bout les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Propriété

Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points du plan. On a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Exemple :

$$1) \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$$

$$2) \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{CC} = \vec{0}$$

$$3) \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

$$4) \vec{BC} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$5) \vec{CB} - \vec{AB} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$$

$$6) \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$$

3) Multiplication par un réel**Propriété**

On peut factoriser ou développer par un réel avec des vecteurs.

Exemples :

- 1) $4(\vec{u} + \vec{v}) = 4\vec{u} + 4\vec{v}$
- 2) $4(2\vec{u}) = 8\vec{u}$
- 3) $5(2\vec{u} + 3\vec{v}) = 10\vec{u} + 15\vec{v}$

4) colinéarité de vecteurs

Définition

notion de colinéarité : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits colinéaires s'ils ont la même direction quel que soit leurs sens et leurs normes. Dans ce cas, il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Propriété

Parallélisme et alignement : Soient les points A, B et C du plan.

- \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires équivaut à dire que $(AB) // (CD)$
- \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires équivaut à dire que A, B et C sont alignés

Propriété

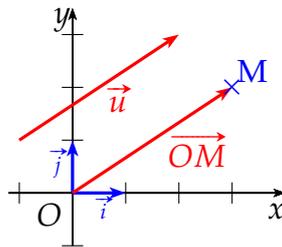
milieux : Soient A et B deux points du plan. I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, c'est-à-dire $\vec{AI} = \vec{IB}$

IV. Coordonnées de vecteurs dans un repère

Définition

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un repère du plan. Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \vec{OM}$. Les coordonnées du vecteur \vec{u} dans ce repère sont alors celles du point M.

Si un point M a pour coordonnées $(x_M; y_M)$ alors on note $\vec{u}(x_M; y_M)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$



Propriété

égalité de vecteurs Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$

1) Opérations sur les vecteurs

⚙️ Propriété

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors :

- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$
- $k\vec{u} \begin{pmatrix} k x_1 \\ k y_1 \end{pmatrix}$

☰ Méthode - Utiliser les opérations sur les vecteurs

Enoncé :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$

Solution :

Les coordonnées de \vec{w} sont : $3 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 6 - (-6) \\ -14 - 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 12 \\ -22 \end{pmatrix}$$

2) Calcul des coordonnées d'un vecteur

⚙️ Propriété

Dans un repère, soient A et B deux points de coordonnées A ($x_A; y_A$) et B ($x_B; y_B$).

alors \vec{AB} a pour coordonnées $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

☰ Méthode - Coordonnées d'un vecteur

Enoncé :

Soient A(-1; -5) et B(2;3). Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{AB}

Solution :

Les coordonnées de \vec{AB} sont données par : $x_B - x_A = 2 - (-1) = 3$ et $y_B - y_A = 3 - (-5) = 8$. Donc

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Pour le vérifier, faire une figure, et vérifier qu'on se déplace bien horizontalement de 3 carreaux vers la droite puis verticalement de 8 carreaux vers le haut afin d'aller du point A au point B.

V. Colinéarité de vecteurs dans un repère

1) Critère de colinéarité

Propriété

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors ces 2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles, soit $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

Méthode - Montrer que 2 vecteurs sont colinéaires

Énoncé :

- 1) Est-ce que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
- 2) Est-ce que les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Solution :

- 1) Puisque $(-5) \times (-9) - 3 \times 15 = 45 - 45 = 0$, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- 2) Puisque $7 \times (-2) - (-3) \times 4 = -14 + 12 = -2$, les vecteurs \vec{a} et \vec{b} ne sont pas colinéaires.

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

On note : $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété

Dire que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires revient à dire que $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Méthode - Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant

Énoncé : Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

- 1) $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$
- 2) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$

Solution :

- 1) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = (-6) \times (-15) - 10 \times 9 = 90 - 90 = 0$
Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont donc colinéaires.
- 2) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$
Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont donc pas colinéaires.

3) Application de la colinéarité

☰ Méthode - Appliquer la colinéarité

Énoncé : On considère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $A(-1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(-2; -3)$, $D(6; -1)$, $E(5; 0)$, 5 points du plan.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Solution :

$$1) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} = \begin{pmatrix} 6 - (-2) \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\vec{CD} = 2\vec{AB}$ donc les coordonnées de \vec{AB} et \vec{CD} sont proportionnelles, et on en déduit que les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

$$2) \vec{EB} = \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{ED} = \begin{pmatrix} 6 - 5 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{EB}; \vec{ED}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-1) - 2 \times 1 = 0$$

Les coordonnées de \vec{EB} et \vec{ED} vérifient le critère de colinéarité des vecteurs. On en déduit que les vecteurs \vec{EB} et \vec{ED} sont colinéaires.

Les points E, B et D sont donc alignés.