

Chapitre 3

Fonction sinus et cosinus

I. Résoudre une équation trigonométrique

☰ Méthode - Résoudre une équation trigonométrique

Énoncé :

Résoudre sur $[3\pi; 5\pi]$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **Réponse :**

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

On en déduit les solutions sur \mathbb{R} .

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

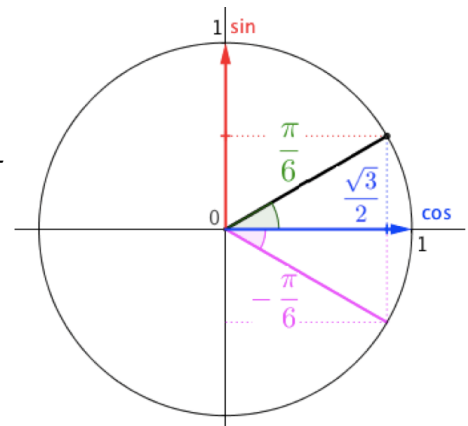
On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $[3\pi; 5\pi]$ (ou $[\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}]$)

$$k = 1 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin [\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}] \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \notin [\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}] \end{cases}$$

$$k = 2 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \in [\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}] \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6} \in [\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}] \end{cases}$$

$$k = 3 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{37\pi}{6} \notin [\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}] \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{35\pi}{6} \notin [\frac{18\pi}{12}; \frac{30\pi}{6}] \end{cases}$$

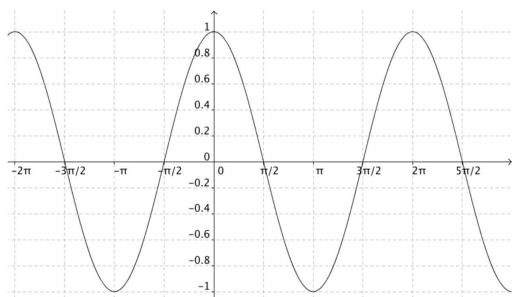
On peut maintenant conclure : $S = \{\frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}\}$



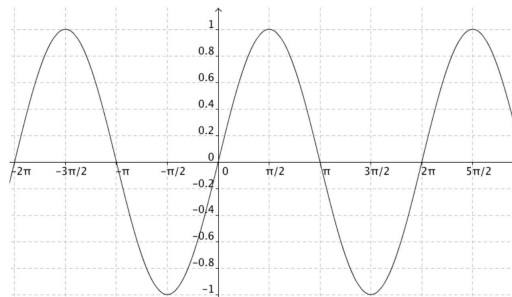
II. Définitions et représentations graphiques

☺ Définitions

- La fonction cosinus est la fonction définie sur \mathbb{R} qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.
- La fonction sinus, est la fonction définie sur \mathbb{R} qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.



Fonction cosinus



Fonction sinus

III. Périodicité

Propriétés

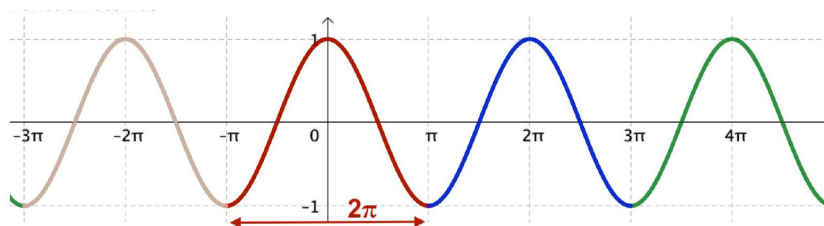
- $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
- $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

Démonstration

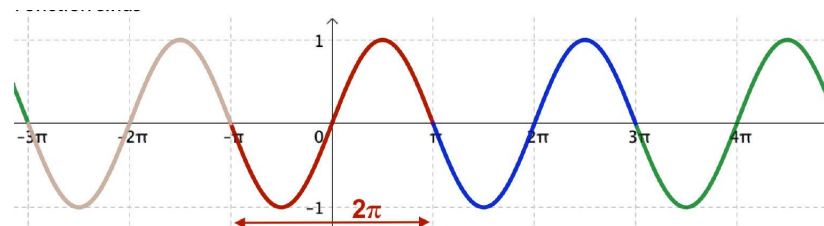
Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π . Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π .

1) Fonction cosinus



2) Fonction sinus



IV. Parité

Définitions

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une fonction impaire.

Remarques

- ☞ Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.
- ☞ Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.

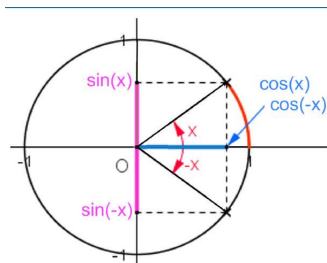
Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés

- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration

Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc : $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



Remarques

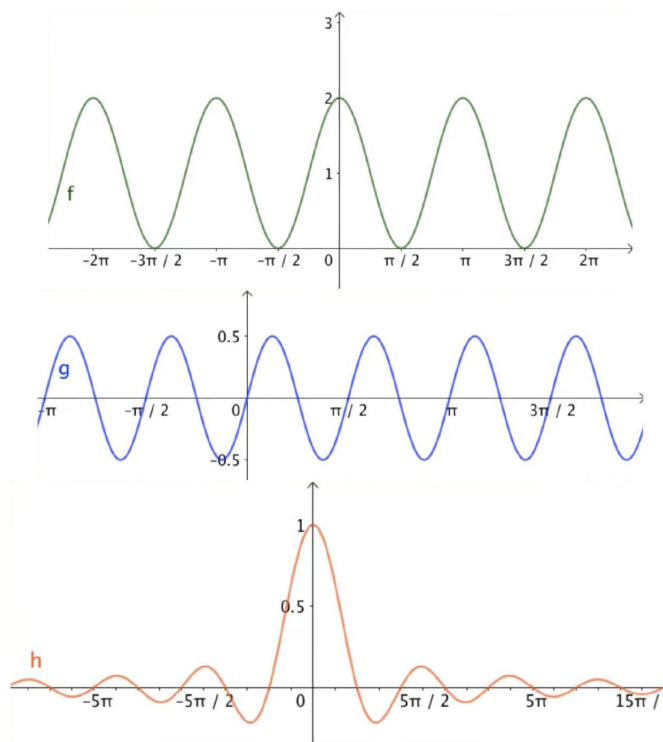
- ☞ La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ☞ La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

V. Méthodes

Méthode - Reconnaître graphiquement la parité et la périodicité d'une fonction

Énoncé :

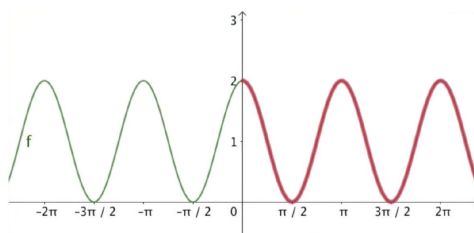
Déterminer graphiquement la parité et la périodicité des fonctions f , g et h représentées ci-dessous :



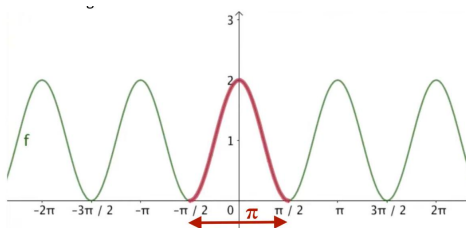
Corrigé :

- FONCTION f :

La fonction f est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

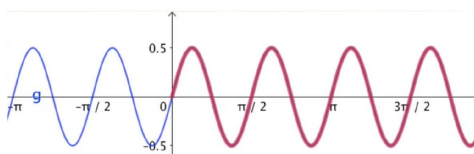


La fonction f est périodique de période π car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π .

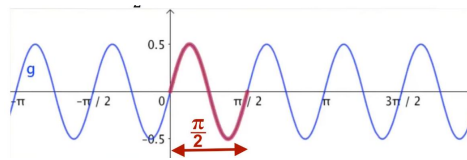


- FONCTION g :

La fonction g est impaire car sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

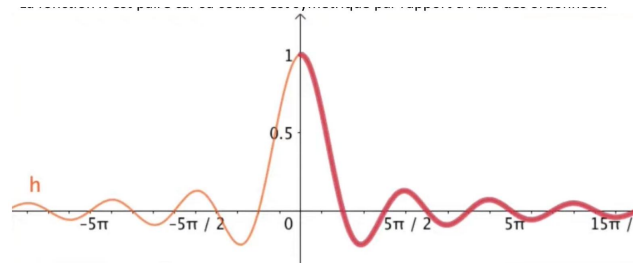


La fonction g est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$.



- FONCTION h :

La fonction h est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



La fonction h n'est pas périodique, on ne retrouve pas le même morceau de courbe sur différents intervalles.

☰ Méthode - Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Énoncé :

Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

Corrigé :

On a :

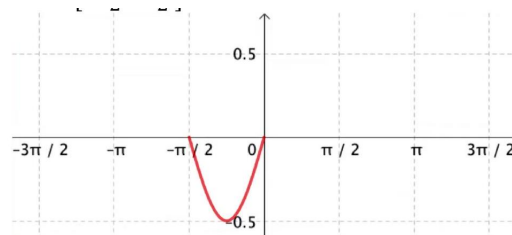
$f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin(x) + \sin(2x) = -(\sin(x) - \sin(2x)) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

☰ Méthode - Compléter un graphique par parité et périodicité

Énoncé :

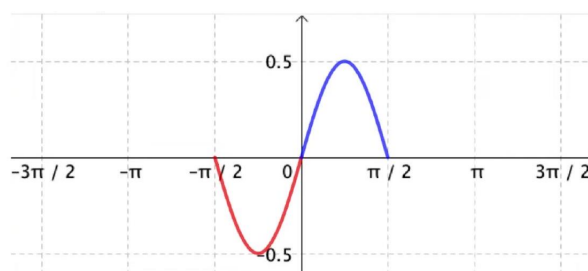
Soit f une fonction impaire et périodique de période π . Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.



Corrigé :

1^{ère} étape : La fonction est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

On complète donc par symétrie centrale.



2^e étape : La fonction est périodique de période π . On retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π .

Le morceau déjà tracé a pour longueur π , on le reproduit à gauche et à droite.

