Chapitre 7

Dérivation

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0 . On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0 On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$

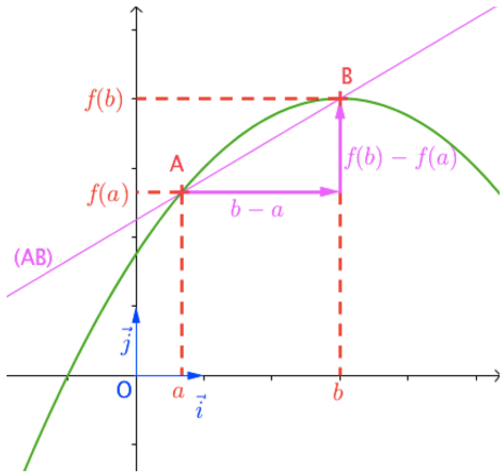
Définition

On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0 .
On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L.

II. Nombre dérivé

1) Rappel : Pente d'une droite

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a<b$. Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b. La pente (ou le coefficient directeur) de la droite (AB) est égal à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

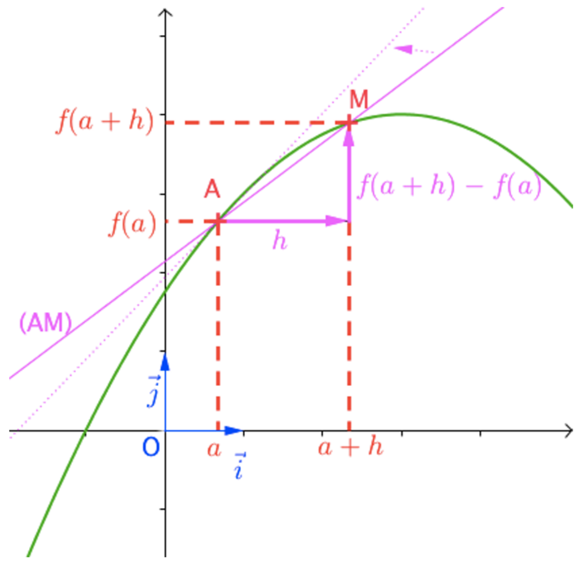


2) Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit un réel a appartenant à I.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$ La pente de la droite (AM) est égale à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



Définition

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

L est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

3) Démontrer qu'une fonction est dérivable

Méthode

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ Démontrer que f est dérivable en $x = 2$. On commence par calculer $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times 2+3}{h}\\ &= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}\\ &= \frac{6h+h^2}{h}\\ &= \frac{h(6+h)}{h}\\ &= 6+h\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 6+h = 6.$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.

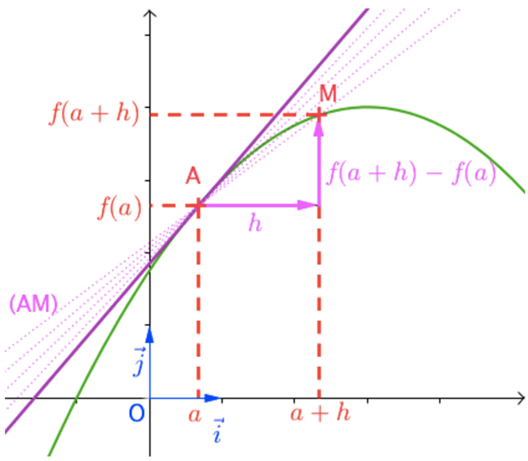
III. Tangente à une courbe

1) Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition

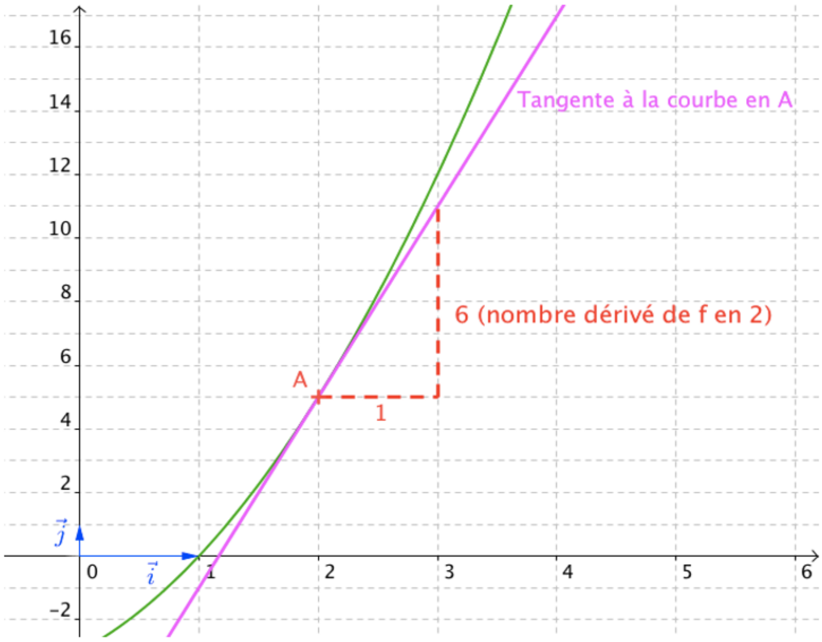
La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.



2) Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

Méthode

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+2x-3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.
Déterminer la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 . Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de pente (coefficient directeur) 6.



3) Relation entre tangente et nombre dérivée

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme : $y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :
La tangente passe par le point $A(a; f(a))$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

4) Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Méthode

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 .
On a vu plus haut que la pente de la tangente est égal à 6 . Donc son équation est de la forme : $y = 6(x - 2) + f(2)$, soit :

$y = 6(x-2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$
$y = 6x - 7$
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.

IV. Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple (démonstration au programme)

Démonstration

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Démontrons que pour tout x réel, on a :
$f'(x) = 2x$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

$$\text{Pour } h \neq 0 : \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

$$\text{Or } : \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$. On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$. Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

2) Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geqslant 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geqslant 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\,0;+\infty[$

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=4x^3$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x)=-\dfrac{5}{x^6}$.

3) Démonstration au programme pour la fonction inverse

Démonstration

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
Pour $h\neq 0$ et $a\neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\text{Or : }\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

4) Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

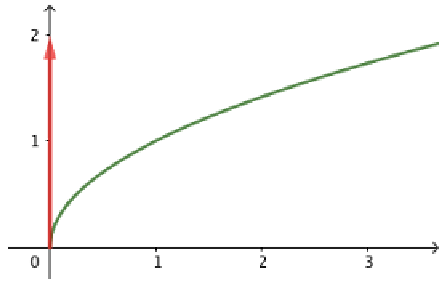
Démonstration

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt(x)$.
On calcule le taux de variation de f en 0 :

$$\text{Pour } h > 0 : \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \frac{h}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\text{Or } : \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

En effet, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc f n'est pas dérivable en 0. Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.



V. Opérations sur les fonctions dérivées

1) Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2$.
Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{a+h+(a+h)^2-a-a^2}{h} \\ &= \frac{a+h+a^2+2ah+h^2-a-a^2}{h} \\ &= \frac{h+2ah+h^2}{h} = 1+2a+h \\ &= 1+2a+h\end{aligned}$$

$$\text{Donc } : \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 1+2a+h = 1+2a$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1+2x$.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$. On a ainsi : $f(x) = u(x) + v(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
On constate sur cet exemple que : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Soit encore : $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

a) Formules d'opération sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

b) démonstration : Fonction dérivée d'un produit

La démonstration sera faite en classe avec l'exercice 98 p 128.

2) Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Méthode

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^3$ **2)** $f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 5x}$ **4)** $f_4(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$

1) $f_1(x) = 5u(x)$ avec $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$
Donc : $f_1'(x) = 5u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

2) $f_2(x) = u(x) + v(x)$ avec :
$u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 6x$
$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
Donc : $f_2'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$
Donc : $f_3'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2} = -\dfrac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$

4) $f_4(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$
$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$
Donc : $f_4'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x+4)(5x-1) + (3x^2+4x) \times 5$
$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$
$= 45x^2 + 34x - 4$

3) Composée de dérivées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(ax+b)$	f dérivable sur I	$af'(ax+b)$

Méthode

$f(x) = \sqrt{5x-4}$
Alors $f'(x) = 5\dfrac{1}{2\sqrt{5x-4}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}}$
En effet : $(5x-4)' = 5$ et $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$