Chapitre 7

Dérivation

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0 . On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0 On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$

Définition

....

....

....

....

II. Nombre dérivé

1) Rappel : Pente d'une droite

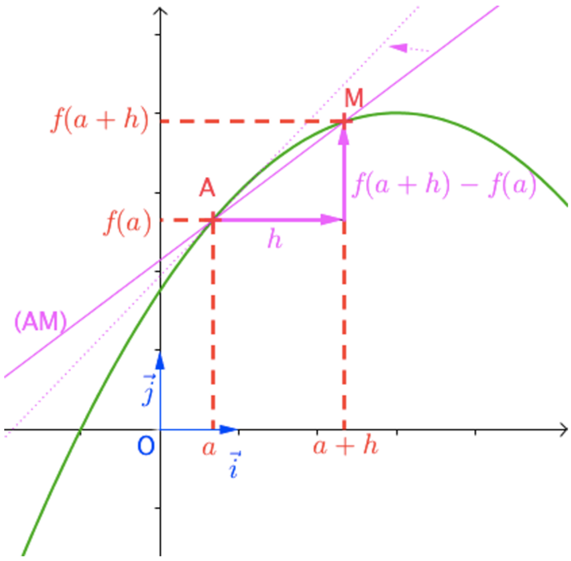
Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a<b$. Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b. La pente (ou le coefficient directeur) de la droite (AB) est égal à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2) Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit un réel a appartenant à I.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$ La pente de la droite (AM) est égale à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



Définition

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3) Démontrer qu'une fonction est dérivable

Méthode

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

. . . .

III. Tangente à une courbe

1) Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

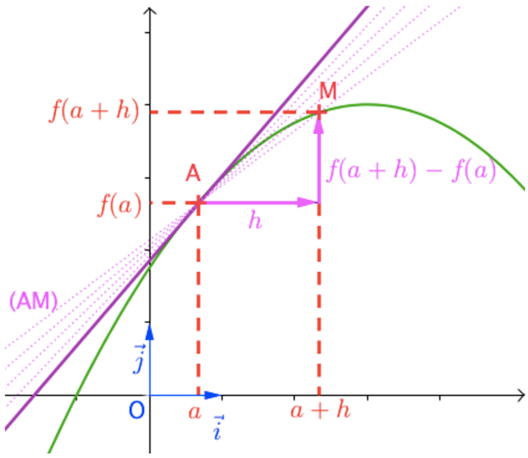
Définition

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



2) Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

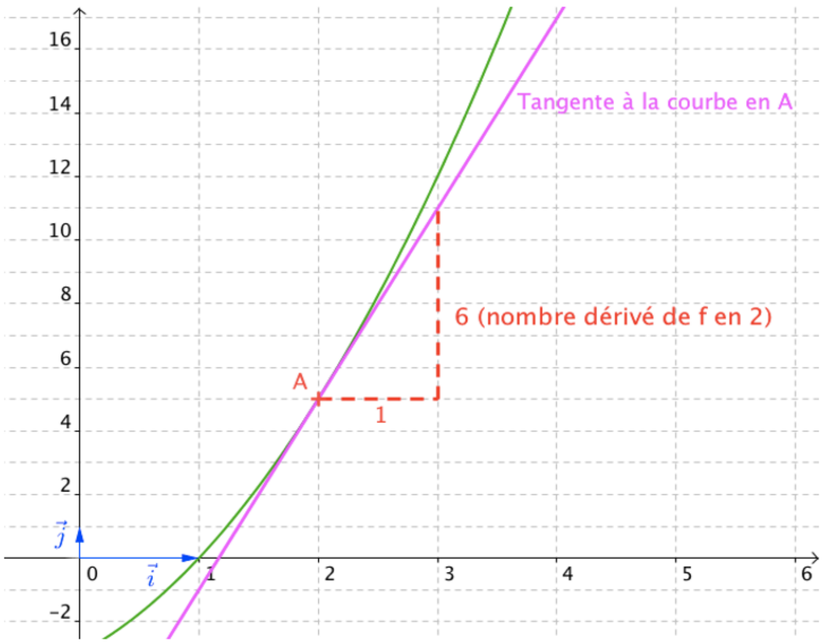
Méthode

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.
Déterminer la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

. . . .

. . . .

. . . .



3) Relation entre tangente et nombre dérivée

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

....

Démonstration

....

4) Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Méthode

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 .

....

....

....

....

....

IV. Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple (démonstration au programme)

Démonstration

....

Définition

....

....

....

. . . .

2) Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geqslant 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geqslant 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$.

3) Démonstration au programme pour la fonction inverse

Démonstration

. . . .

4) Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

Démonstration

....

V. Opérations sur les fonctions dérivées

1) Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2$.
Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{a+h+(a+h)^2-a-a^2}{h} \\
&= \frac{a+h+a^2+2ah+h^2-a-a^2}{h} \\
&= \frac{h+2ah+h^2}{h} = 1+2a+h \\
&= 1+2a+h
\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 1+2a+h = 1+2a$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1+2x$.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$. On a ainsi : $f(x) = u(x) + v(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
On constate sur cet exemple que : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Soit encore : $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

a) Formules d'opération sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

b) démonstration : Fonction dérivée d'un produit

Démonstration

....

2) Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Méthode

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^3$ **2)** $f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{2x^2+5x}$ **4)** $f_4(x) = (3x^2+4x)(5x-1)$

....

3) Composée de dérivées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(ax+b)$	f dérivable sur I	$af'(ax+b)$

Méthode

Calculer la dérivé des fonctions f et g suivantes : $f(x) = \sqrt{5x-4}$ et $g(x) = (4x-3)^5$

....