Correction - Exercices d'entrainement Dérivation

Nombre dérivée

Exercice 1
Soit la fonction $f : x \mapsto (4-x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

On va utiliser $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $a = 1$
$f(1) = 3^2 = 9$ et $f(1+h) = (4-1-h)^2 = (3-h)^2 = 9-6h+h^2$
D'où : $f(1+h) - f(1) = 9-6h+h^2-9 = -6h+h^2$
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-6h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -6+h = -6$
La limite est un nombre réel donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = -6$.

Exercice 2
Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-7}{3-x}$ définie sur $]-\infty; 3[$.
Montrer que f est dérivable en 2 et déterminer $f'(2)$.

On va utiliser $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $a = 2$
$f(2) = \dfrac{-7}{3-2} = -7$ et $f(2+h) = \dfrac{-7}{3-(2+h)} = \dfrac{-7}{1-h}$
D'où : $f(2+h) - f(2) = \dfrac{-7}{1-h} + 7 = \dfrac{-7}{1-h} + \dfrac{7(1-h)}{1-h} = \dfrac{-7h}{1-h}$
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{-7h}{1-h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-7h}{1-h} \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{7}{1-h} = -7$
La limite est un nombre réel donc la fonction f est dérivable en 2 et $f'(2) = -7$.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1) Montrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$.

On va utiliser $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $a = 3$
$f(3) = 3^2 + 1 = 10$ et $f(3+h) = (3+h)^2 + 1 = 9+6h+h^2+1 = 10+6h+h^2$
D'où : $f(3+h) - f(3) = 10+6h+h^2-10 = 6h+h^2$
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 6+h = 6$
La limite est un nombre réel donc la fonction f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

2) Montrer que f est dérivable en -2 et déterminer $f'(-2)$.

On va utiliser $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $a = -2$
$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ et $f(-2+h) = (-2+h)^2 + 1 = 4-4h+h^2+1 = 5-4h+h^2$
D'où : $f(-2+h) - f(-2) = 5-4h+h^2-5 = -4h+h^2$
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -4+h = -4$
La limite est un nombre réel donc la fonction f est dérivable en -2 et $f'(2) = -4$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}$.

1) Montrer que f est dérivable en -3 et déterminer $f'(-3)$.

On va utiliser $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ avec $a = -3$

$f(-3) = \dfrac{3}{-3} = -1$ et $f(-3+h) = \dfrac{3}{h-3}$

D'où : $f(-3+h) - f(-3) = \dfrac{3}{h-3} + 1 = \dfrac{3}{h-3} + \dfrac{h-3}{h-3} = \dfrac{h}{h-3}$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{h}{h-3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h-3} \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h-3} = -\dfrac{1}{3}$

La limite est un nombre réel donc la fonction f est dérivable en -3 et $f'(-3) = -\dfrac{1}{3}$.

2) Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

On va utiliser $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ avec $a = 1$

$f(1) = \dfrac{3}{1} = 3$ et $f(1+h) = \dfrac{3}{1+h}$

D'où : $f(1+h) - f(1) = \dfrac{1}{1+h} - 3 = \dfrac{3}{1+h} - \dfrac{3(1+h)}{1+h} = \dfrac{-3h}{1+h}$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{-3h}{1+h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3h}{1+h} \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{3}{1+h} = -3$

La limite est un nombre réel donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = -3$.

Equation réduite d'une tangente

Exercice 5

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$. Soit C_f sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 .

On va utiliser la formule pour obtenir l'équation de droite de la tangente$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = 2$

$y = -1(x-2) + 5 \iff y = -x + 7$

Exercice 6

Soit une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(4) = -1$ et $g'(4) = 2$. Soit C_g sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_g au point d'abscisse 4.

On va utiliser la formule pour obtenir l'équation de droite de la tangente$y = g'(a)(x-a) + g(a)$ avec ici $a = 4$

$y = 2(x-4) + (-1) \iff y = 2x - 9$

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(2x^2 - 5x + 4\right)^{10}$. On admet que g est dérivable en 1 , et que $g'(1) = -10$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

On va utiliser la formule pour obtenir l'équation de droite de la tangente $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ avec ici $a = 1$

On a besoin de calculer $g(1)$: $g(1) = \left(2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 4\right)^{10} = 1^{10} = 1$

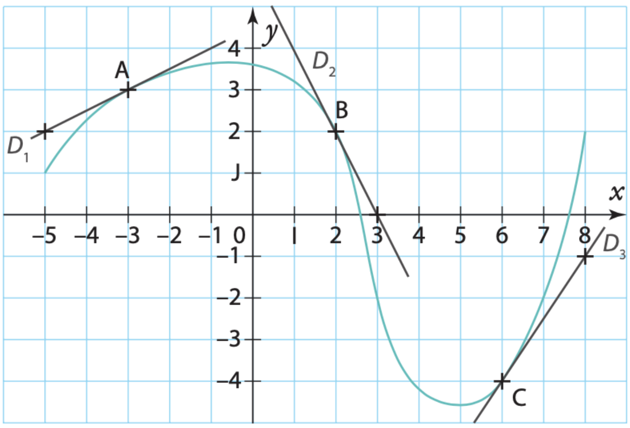
$y = -10(x-1) + 1 \iff y = -10x + 11$

Exercice 8
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. Le point $A(3;-1)$ appartient à la courbe C_f. Sachant que la tangente T à la courbe C_f au point A passe par le point $J(0;1)$, déterminer $f'(3)$, puis l'équation de T.

On va utiliser la formule pour obtenir l'équation de droite de la tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = 3$
On a $f(3) = 1$ et on a besoin de calculer $f'(3)$: $f'(3) = \dfrac{y_J - y_A}{x_J - x_A} = \dfrac{1-(-1)}{0-3} = -\dfrac{2}{3}$
$y = -\dfrac{2}{3}(x-3) + (-1) \iff y = -\dfrac{2}{3}x + 1$

Détermination graphique du nombre dérivé

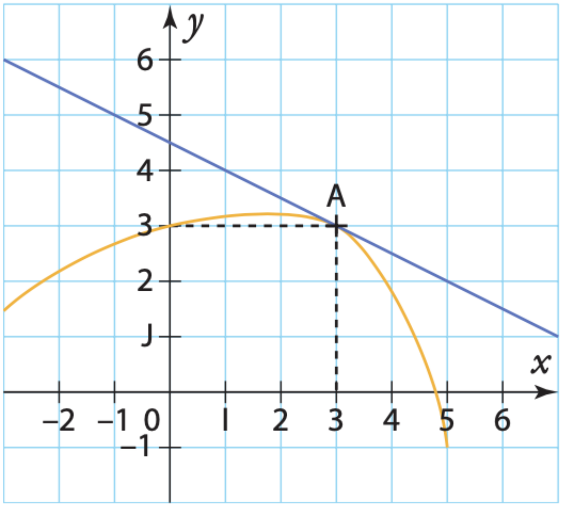
Exercice 9
Sur le graphique suivant, on donne la courbe représentative C_g d'une fonction g sur l'intervalle $[-5;8]$. Les droites D_1, D_2 et D_3 sont respectivement tangentes à C_g aux points A d'abscisse -3, B d'abscisse 2, et C d'abscisse 6 .



Lire sur le graphique les valeurs de $g(-3), g(2), g(6)$ et $g'(-3), g'(2), g'(6)$

$g(-3) = 3 \qquad g(2) = 2 \qquad g(6) = -4$
$g'(-3) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2} \qquad g'(2)\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{1} = -2 \qquad g'(6) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{2}$

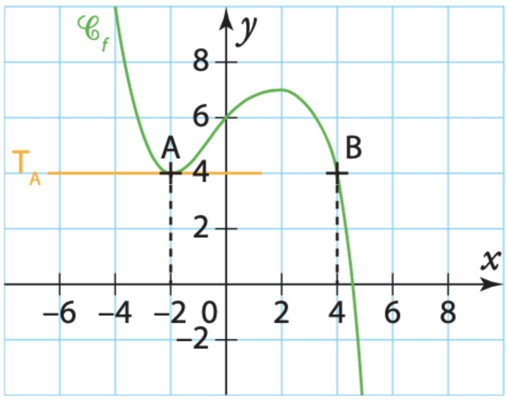
Exercice 10
La courbe d'une fonction g définie sur $[-3;5]$ est représentée ci-contre. La tangente à cette courbe au point A d'abscisse 3 passe par le point de coordonnées $(-3;6)$. Que vaut $g(3)$? Que vaut $g'(3)$?



$g(3) = 3$. Il s'agit de l'ordonnée du point A.
$g'(3) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6-3}{-3-3} = -\dfrac{1}{2}$. Il s'agit de la pente de la tangente au point A (la droite bleue).

Exercice 11

Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. T_A est la tangente à C_f au point d'abscisse -2 . On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(4) = -4$.



1) Déterminer $f'(-2)$ et donner l'équation de la tangente T_A.

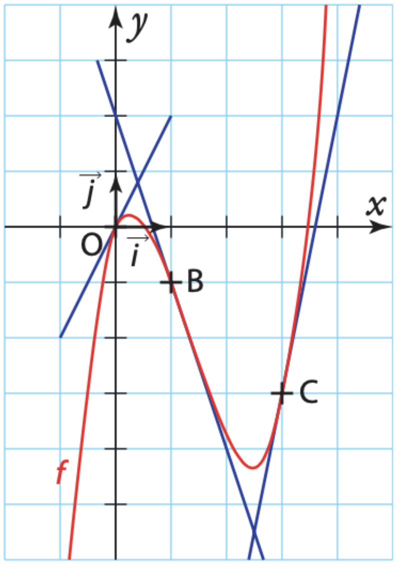
La droite T_A est horizontale. Son coefficient directeur est donc nul. $f'(-2) = 0$ et $T_A : y = 4$

2) B est le point de la courbe d'abscisse 4. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point B.

On va utiliser la formule pour obtenir l'équation de droite de la tangente$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = 4$, $f(a) = 4$ et $f'(a) = -4$
$y = -4(x-4) + 4 \iff y = -4x + 20$

Exercice 12

Dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, la courbe rouge C_f représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, les droites tracées en bleu représentent les tangentes à C_f respectivement au point O, au point B d'abscisse 1 et au point C d'abscisse 3.



1) Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

$f'(0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1} = 2 \qquad f'(1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{1} = -3 \qquad f'(3) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5}{1} = 5$

2) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point C.

L'équation de la tangente est du type $y = mx + p$ avec $m = f'(3) = 5$ De plus la droite passe par le point C de coordonnées $(3; -3)$, donc : $y = mx + p \iff -3 = 5 \times 3 + p \iff p = -18$
donc l'équation de la tangente est $y = 5x - 18$

3) La courbe C_f est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 2x$ Retrouver par le calcul les résultats des questions 1. et 2.

On a 2 méthodes possibles pour la 1). Soit on calcule le nombre dérivé avec $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $a = 0$, $a = 1$ et $a = 3$, soit on détermine la fonction dérivée et on calcule alors directement $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$ à l'aide de la fonction f'. Je choisis ici la 2ème solution :
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$.
$f'(0) = 3 \times 0^2 - 8 \times 0 + 2 = 2$
$f'(1) = 3 \times 1^2 - 8 \times 1 + 2 = -3$
$f'(3) = 3 \times 3^2 - 8 \times 3 + 2 = 5$
On va utiliser la formule pour obtenir l'équation de droite de la tangente$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec ici $a = 3$
On a $f(3) = 3^3 - 4 \times 3^2 + 2 \times 3 = -3$ et $f'(3) = 5$
$y = 5(x - 3) + (-3) \iff y = 5x - 18$

Fonctions dérivées

Exercice 13
Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée.

1) $f : x \mapsto 9x^4$ définie sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 9 \times 4x^3 = 36x^3$

2) $h : x \mapsto \dfrac{3}{4}x - 7$ définie sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = \frac{3}{4}$

3) $i : x \mapsto \sqrt{x}(3x-1)$ définie sur $[0; +\infty[$

on utilise la propriété $(uv)' = u'v + v'u$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x - 1$
$i'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (3x-1) + 3\sqrt{x} = \frac{3x-1+6x}{2\sqrt{x}} = \frac{9x-1}{2\sqrt{x}}$

4) $j : x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

on utilise la propriété $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = 1 - x$
$j'(x) = \frac{3x^2(1-x) - (-1)x^3}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3 + 3x^2}{(1-x)^2}$

Exercice 14
Déterminer sur quel ensemble est dérivable chacune des fonctions suivantes, puis déterminer sa dérivée.

1) $f : x \mapsto -1,2x^4 + 7x^3 - x$ définie sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = -1,2 \times 4x^3 + 7 \times 3x^2 - 1 = -4,8x^3 + 21x^2 - 1$

2) $g : x \mapsto \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = \frac{3}{5} \times 5x^4 - \frac{1}{9} \times 3x^2 - 0 = 3x^4 - \frac{1}{3}x^2$

3) $h : x \mapsto x^3(11 - 6x)$ définie sur $\mathbb{R}$

on utilise la propriété $(uv)' = u'v + v'u$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = 11 - 6x$
$h'(x) = 3x^2 \times (11 - 6x) - 6x^3 = -24x^3 + 33x^2$

4) $j : x \mapsto \frac{25}{-10x+9}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{9}{10}\right\}$

on utilise la propriété $\left(\frac{k}{u}\right)' = -\frac{ku'}{u^2}$ avec $u(x) = -10x + 9$
$j'(x) = -\frac{25 \times (-10)}{(-10x+9)^2} = \frac{250}{(-10x+9)^2}$

Exercice 15
Déterminer sur quel ensemble est dérivable chacune des fonctions suivantes, puis déterminer sa dérivée.

1) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^4}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{4}{x^5} = \frac{x^6 - 4}{x^5}$

2) $g : x \mapsto \frac{1}{x}(9 - 6x)$

on utilise la propriété $(uv)' = u'v + v'u$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 9 - 6x$
$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times (9-6x) - 6 \times \frac{1}{x} = \frac{-9+6x-6x}{x^2} = \frac{-9}{x^2}$

3) $h : x \mapsto \frac{2}{1-x}$

on utilise la propriété $\left(\dfrac{k}{u}\right)' = -\dfrac{ku'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 - x$
$j'(x) = -\dfrac{2 \times (-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

4) $i : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{4x + 7}$

on utilise la propriété $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = 4x + 7$
$i'(x) = \dfrac{2x(4x+7) - 4(x^2-1)}{(4x+7)^2} = \dfrac{4x^2 + 14x + 4}{(4x+7)^2}$

Exercice 16

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto (-9x+1)^5$ et h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h : x \mapsto \sqrt{3x-1}$.
Pour les 2 fonctions, déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée.

$g'(x) = -9(-9x+1)^4 = -45(-9x+1)^4$ $\qquad$ $h'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

Exercice 17

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble I sur lequel elle est dérivable, puis sa fonction dérivée sur I.

1) $f(x) = \dfrac{5}{2x} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{7x^2}{4}$

$f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{7 \times 2x}{4} = -\dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{7x \times x^2}{2x^2} = \dfrac{-7x^3 - 5}{2x^2}$

2) $g(x) = \dfrac{-4}{5x}(x - 11)$

on utilise la propriété $(uv)' = u'v + v'u$ avec $u(x) = -\dfrac{4}{5x}$ et $v(x) = x - 11$
$g'(x) = \dfrac{4}{5x^2} \times (x - 11) + 1 \times \dfrac{-4}{5x} = \dfrac{4x - 44 - 4x}{5x^2} = -\dfrac{44}{5x^2}$

3) $h(x) = \dfrac{5x^2 - 8x + 1}{21 - 7x}$

on utilise la propriété $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = 5x^2 - 8x + 1$ et $v(x) = 21 - 7x$
$h'(x) = \dfrac{(10x-8)(21-7x) - (-7)(5x^2 - 8x + 1)}{(21-7x)^2} = \dfrac{210x - 168 + 56x - 70x^2 + 35x^2 - 56x + 7}{(21-7x)^2}$
$h'(x) = \dfrac{-35x^2 + 210x - 161}{(21-7x)^2}$

4) $j(x) = \dfrac{-5}{3x^2 + 2}$

on utilise la propriété $\left(\dfrac{k}{u}\right)' = -\dfrac{ku'}{u^2}$ avec $u(x) = 3x^2 + 2$
$j'(x) = \dfrac{5 \times 6x}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{30x}{(3x^2+2)^2}$

5) $k(x) = \dfrac{9x}{x^2 - 6x + 5}$

on utilise la propriété $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = 9x$ et $v(x) = x^2 - 6x + 5$

$k'(x) = \dfrac{9(x^2-6x+5)-(2x-6)(9x)}{(x^2-6x+5)^2} = \dfrac{-9x^2+45}{(x^2-6x+5)^2}$
$h'(x) = \dfrac{-35x^2+210x-161}{(21-7x)^2}$

6) $m(x) = \sqrt{10-x}$

$m'(x) = -1 \times \dfrac{1}{2\sqrt{10-x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{10-x}}$

Exercice 18
Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble I sur lequel elle est dérivable, puis sa fonction dérivée sur I.

1) $m : x \mapsto -\dfrac{2}{9}x^3 + 4x^2 - 5$

$m'(x) = \dfrac{2}{9} \times 3x^2 + 4 \times 2x = \dfrac{2}{3}x^2 + 8x$

2) $n : x \mapsto -\dfrac{7x}{2}(8x+1)$

on utilise la propriété $(uv)' = u'v + v'u$ avec $u(x) = -\dfrac{7x}{2}$ et $v(x) = (8x+1)$
$g'(x) = -\dfrac{7}{2} \times (8x+1) + 8 \times \dfrac{-7x}{2} = -56x - \dfrac{7}{2}$

3) $j : x \mapsto \dfrac{1}{5x^5}$

$j'(x) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{-5}{x^4} = -\dfrac{1}{x^4}$

4) $p : x \mapsto -\dfrac{\sqrt{4x+3}}{2}$

$m'(x) = -\dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x+3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{4x+3}}$