Chapitre 9

Suites numériques

Point histoire

Dès l'Antiquité, Archimède de Syracuse (-287 ; -212), met en oeuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π. Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, Archimède donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.
Vers la fin du XVII^{e} siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, ...
Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaitra qu'au début du XIX^{e} siècle avec le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789 ;1857).

I. généralités sur les suites numériques

1) Définition d'une suite numérique

Exemple - Exemple d'introduction : On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : $1, 3, 5, 7, \ldots$
On note (u_n) l'ensemble des éléments de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \ldots$
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Définition

- Une **suite numérique** (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
- u_n est appelé **le terme de rang n** de cette suite (ou d'indice n).

2) Suite définie par une formule explicite

Exemples :

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs. Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $u_0 = 2 \times 0 = 0$
  $u_1 = 2 \times 1 = 2$
  $u_2 = 2 \times 2 = 4$
  $u_3 = 2 \times 3 = 6$
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$ Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$
  $v_l = 3 \times 1^2 - 1 = 2$

$v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$
$v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

Définition

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

3) Suite définie par une relation de récurrence

Exemples :

- On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent. Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $u_0 = 5$
  $u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$
  $u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$
  De façon générale, on peut noter : $u_{n+1} = 3u_n$
- On définit la suite (v_n) par : $v_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 6$ Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $v_0 = 3$
  $v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$
  $v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$
  $v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66$
  Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

  Cependant il est possible d'écrire un algorithme avec Python :

```python
def suite(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=4*u-6
    return(u)
```

```
>>> suite(13)
67108866
```

  Ou sur une calculatrice :

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u–6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
        67108866
        Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u–6→u↵
Next↵
u◢
```

```
?
13
  67108866
  -Disp-
```

Définition

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir de son terme précédent.Il faut connaître au moins un terme de la suite pour calculer les autres termes.

Remarque Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

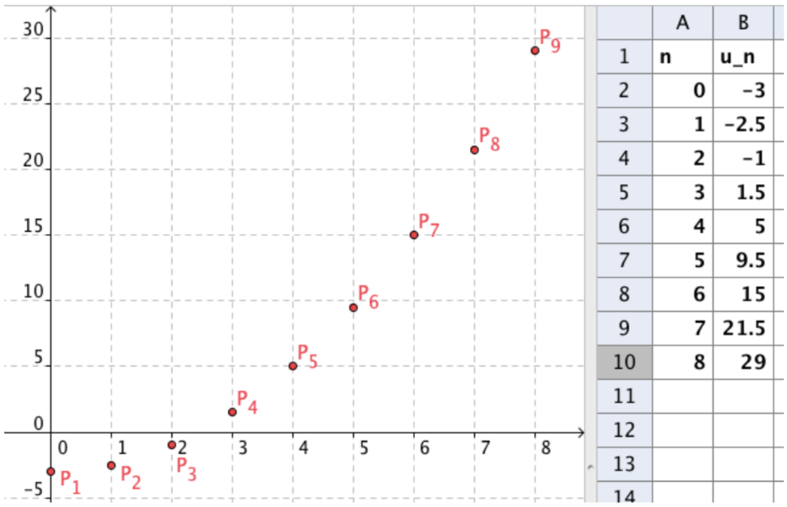
4) Représentation graphique d'une suite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.
On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	$-2,5$	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

Il est possible d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.



II. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique U_n où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 3$,
$U_1 = 8$,
$U_2 = 13$,
$U_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3. La suite est donc définie par : $U_{n+1} = U_n + 5$ et $U_0 = 3$.

Définition

Une suite U_n est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = U_n + r$. Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode - Démontrer si une suite est arithmétique

1) La suite U_n définie par : $U_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite V_n définie par : $V_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $U_{n+1} - U_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 9.
U_n est une suite arithmétique de raison 9.

2) $V_{n+1} - V_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
V_n n'est pas une suite arithmétique.

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 + nr$.

Démonstration

La suite arithmétique U_n de raison r et de premier terme U_0 vérifie la relation $U_{n+1} = U_n + r$.
En calculant les premiers termes :
$U_1 = u_0 + r$
$U_2 = u_1 + r$
$U_3 = u_2 + r$

$U_n = U_{n-1} + r$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :
$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1} + n \times r$
Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques : $U_n = U_0 + nr$

Méthode - Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique U_n tel que $U_5 = 7$ et $U_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite U_n.
2) Exprimer U_n en fonction de n.

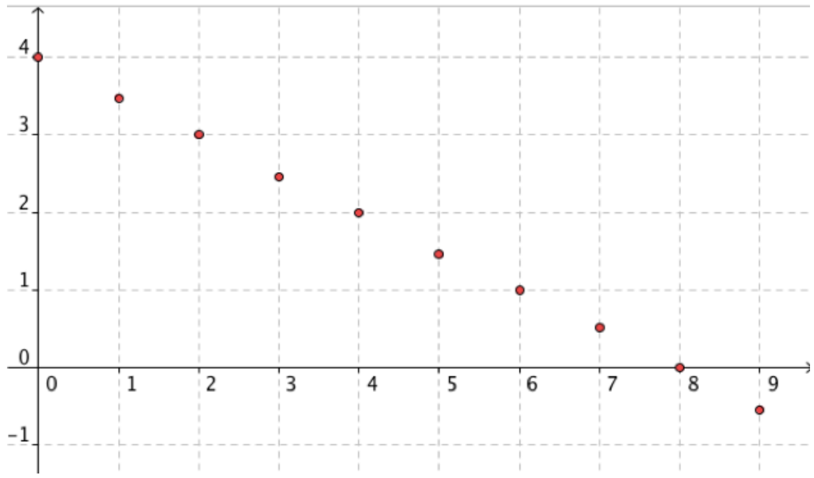
1) Les termes de la suite sont de la forme $U_n = U_0 + nr$
Ainsi $U_5 = U_0 + 5r = 7$ et $U_9 = U_0 + 9r = 19$.
En soustrayant membre à membre, on obtient :
$U_0 + 5r - U_0 - 9r = 7 - 19$
Soit : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.
Comme $U_0 + 5r = 7$, on a : $U_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $U_0 = -8$.

2) $U_n = U_0 + nr$ soit $U_n = -8 + n \times 3$ ou encore $U_n = 3n - 8$

2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite de raison $0,5$ et de premier terme 4.



III. Somme des termes consécutifs : suite arithmétique

Propriété

n est un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Remarque Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1

Démonstration

	1	+	2	+	3	+	...	+	n-1	+	n
+	n	+	n-1	+	n-2	+	...	+	2	+	1
	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+	...	+	(n+1)	+	(n+1)

Donc : $2 \times (1+2+3+...+(n-1)+n) = n(n+1)$

Et donc : $1+2+3+...+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$S_1 = 1+2+3+...+348$ $S_2 = 33+36+39+...+267$

$$S_1 = 1+2+3+...+348 = \frac{348 \times 349}{2} = 60726$$

$$S_2 = 33+36+39+...+267 = 3 \times (11+12+13+...+89)$$
$$= 3 \times ((1+2+3+...+89) - (1+2+3+...+10))$$
$$= 3 \times \left(\frac{89 \times 90}{2} - \frac{10 \times 11}{2}\right) = 11\ 850$$

IV. Suites géométriques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique U_n où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 5, \quad U_1 = 10, \quad U_2 = 20, \quad U_3 = 40.$
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $U_{n+1} = 2 \times U_n$ et $U_0 = 5$.

Définition

Une suite U_n est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = q \times U_n$. Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode - Démontrer si une suite est géométrique

La suite U_n définie par : $U_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?
$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \dfrac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$
Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
U_n est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $U_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exemple - exemple concret : On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par $1,04$. Ce capital suit une progression géométrique de raison $1,04$.

On a ainsi :
$U_1 = 1,04 \times 500 = 520$
$U_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$
$U_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $U_{n+1} = 1,04 \times U_n$ avec $U_0 = 500$
On peut également exprimer U_n en fonction de n : $U_n = 500 \times 1,04^n$.

Propriété

U_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 \times q^n$.

Démonstration

La suite géométrique U_n de raison q et de premier terme U_0 vérifie la relation $U_{n+1} = q \times U_n$.

- Si q ou U_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que q et U_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :
$U_1 = q \times U_0$
$U_2 = q \times U_1$
$U_3 = q \times U_2$

$U_n = q \times U_{n-1}$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient : $u_1 \times U_2 \times U_3 \times \quad \times U_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \quad \times u_{n-1} \times q^n$.
Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques : $U_n = U_0 \times q^n$

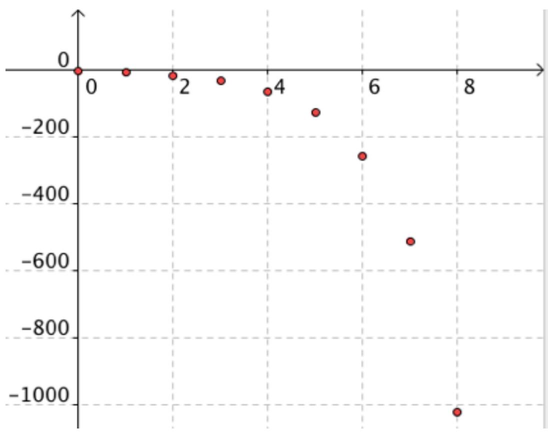
Méthode - Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique U_n tel que $U_4 = 8$ et $U_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite U_n.

Les termes de la suite sont de la forme $U_n = U_0 \times q^n$.
Donc : $U_4 = U_0 \times q^4 = 8$ et $U_7 = U_0 \times q^7 = 512$.
Ainsi : $\dfrac{U_7}{U_4} = \dfrac{U_0 \times q^7}{U_0 \times q^4} = q^3$ et $\dfrac{U_7}{U_4} = \dfrac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi $q =^3 \sqrt{64} = 4$
Comme $U_0 \times q^4 = 8$, on a : $U_0 \times 4^4 = 8$ et donc : $U_0 = \dfrac{1}{32}$.

2) Représentation graphique

Exemple : La suite géométrique U_n définie par $U_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

V. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :
$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Remarque Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$
$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^(n+1)$

Ainsi :
$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1})$
$S - q \times S = 1 - q^(n+1)$
$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$
$S = \dfrac{1 - q^(n+1)}{1 - q}$

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{13}$

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{13} = \dfrac{1 - 3^{14}}{1 - 3} = 2\ 391\ 484$