Chapitre 9

Suites numériques

Point histoire

Dès l'Antiquité, Archimède de Syracuse (-287 ; -212), met en oeuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π. Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, Archimède donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.
Vers la fin du XVII^{e} siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, ...
Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaitra qu'au début du XIX^{e} siècle avec le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789 ;1857).

I. généralités sur les suites numériques

1) Définition d'une suite numérique

Exemple - Exemple d'introduction : On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : $1, 3, 5, 7, \ldots$
On note (u_n) l'ensemble des éléments de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \ldots$
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Définition

- ....
  ....
- ....

2) Suite définie par une formule explicite

Exemples :

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs. Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $u_0 = 2 \times 0 = 0$
  $u_1 = 2 \times 1 = 2$
  $u_2 = 2 \times 2 = 4$
  $u_3 = 2 \times 3 = 6$
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$ Les premiers termes de cette suite sont donc :

$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$
$v_l = 3 \times 1^2 - 1 = 2$
$v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$
$v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

Définition

....

....

....

3) Suite définie par une relation de récurrence

Exemples :

- On définit la suite (v_n) par : $v_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 6$ Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $v_0 = 3$
  $v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$
  $v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$
  $v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66$
  Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

  Cependant il est possible d'écrire un algorithme avec Python :

```python
def suite(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=4*u-6
    return(u)
```

```
>>> suite(13)
67108866
```

Définition

....

....

....

Remarque Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

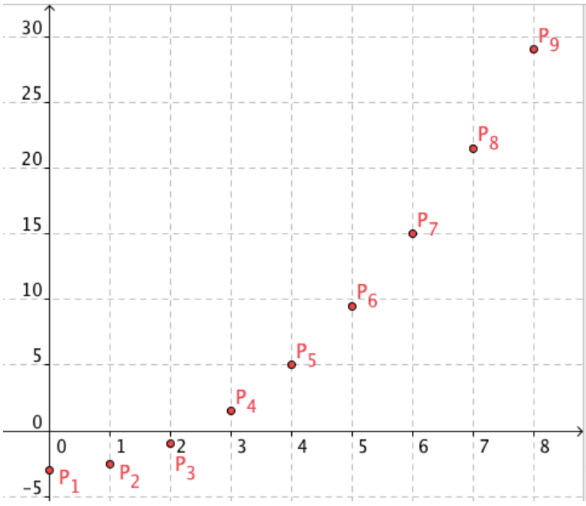
4) Représentation graphique d'une suite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$.
On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	$-2,5$	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

Il est possible d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-3
3	1	-2.5
4	2	-1
5	3	1.5
6	4	5
7	5	9.5
8	6	15
9	7	21.5
10	8	29
11		
12		
13		
14		

II. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique U_n où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 3$,
$U_1 = 8$,
$U_2 = 13$,
$U_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3. La suite est donc définie par : $U_{n+1} = U_n + 5$ et $U_0 = 3$.

Définition

....

....

....

Méthode - Démontrer si une suite est arithmétique

1) La suite U_n définie par : $U_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite V_n définie par : $V_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

voir cahier

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.

....

Démonstration

voir cahier.

Méthode - Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

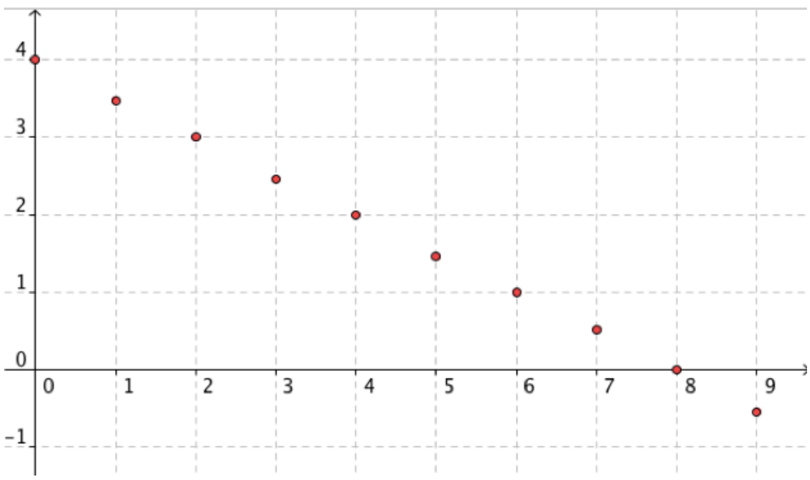
Considérons la suite arithmétique U_n tel que $U_5 = 7$ et $U_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite U_n.
2) Exprimer U_n en fonction de n.

voir cahier

2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite de raison $0,5$ et de premier terme 4.



III. Somme des termes consécutifs : suite arithmétique

Propriété

....

Remarque Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1

Démonstration

voir cahier

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 348$ $S_2 = 33 + 36 + 39 + ... + 267$

voir cahier

IV. Suites géométriques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique U_n où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 5, \quad U_1 = 10, \quad U_2 = 20, \quad U_3 = 40.$
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $U_{n+1} = 2 \times U_n$ et $U_0 = 5$.

Définition

....

....

Méthode - Démontrer si une suite est géométrique

La suite U_n définie par : $U_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?
voir cahier

Exemple - exemple concret : On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par $1,04$. Ce capital suit une progression géométrique de raison $1,04$.

On a ainsi :
$U_1 = 1,04 \times 500 = 520$
$U_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$
$U_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $U_{n+1} = 1,04 \times U_n$ avec $U_0 = 500$
On peut également exprimer U_n en fonction de n : $U_n = 500 \times 1,04^n$.

Propriété

U_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.

....

Démonstration

voir cahier

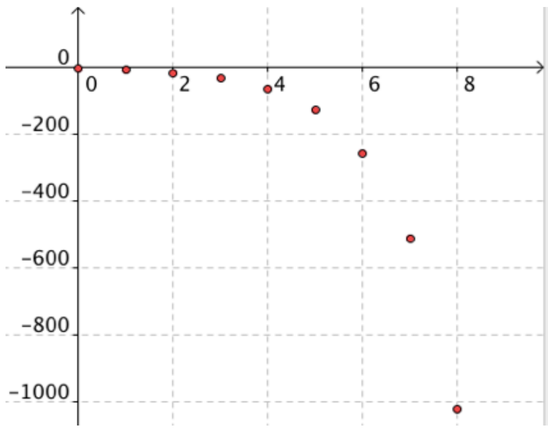
Méthode - Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique U_n tel que $U_4 = 8$ et $U_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite U_n.

voir cahier.

2) Représentation graphique

Exemple : La suite géométrique U_n définie par $U_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

V. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

. . . .

Remarque Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration

voir cahier

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{13}$

voir cahier