Chapitre 8

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par :
$P_A(B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$.

Exemples :
Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit « *Gagné* » ou soit « *Perdu* ».
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement « *On tire une boule rouge* ».
Soit G l'événement « *On tire une boule marquée Gagné* ».
Donc $R \cap G$ est l'événement « *On tire une boule rouge marquée Gagné* ».

Alors : $P(R) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et $P(R \cap G) = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :
$P_R(G) = \dfrac{Card(R \cap G)}{Card(R)} = \dfrac{O,3}{0,4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

Remarque La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilité simples. On a en particulier :

Propriété

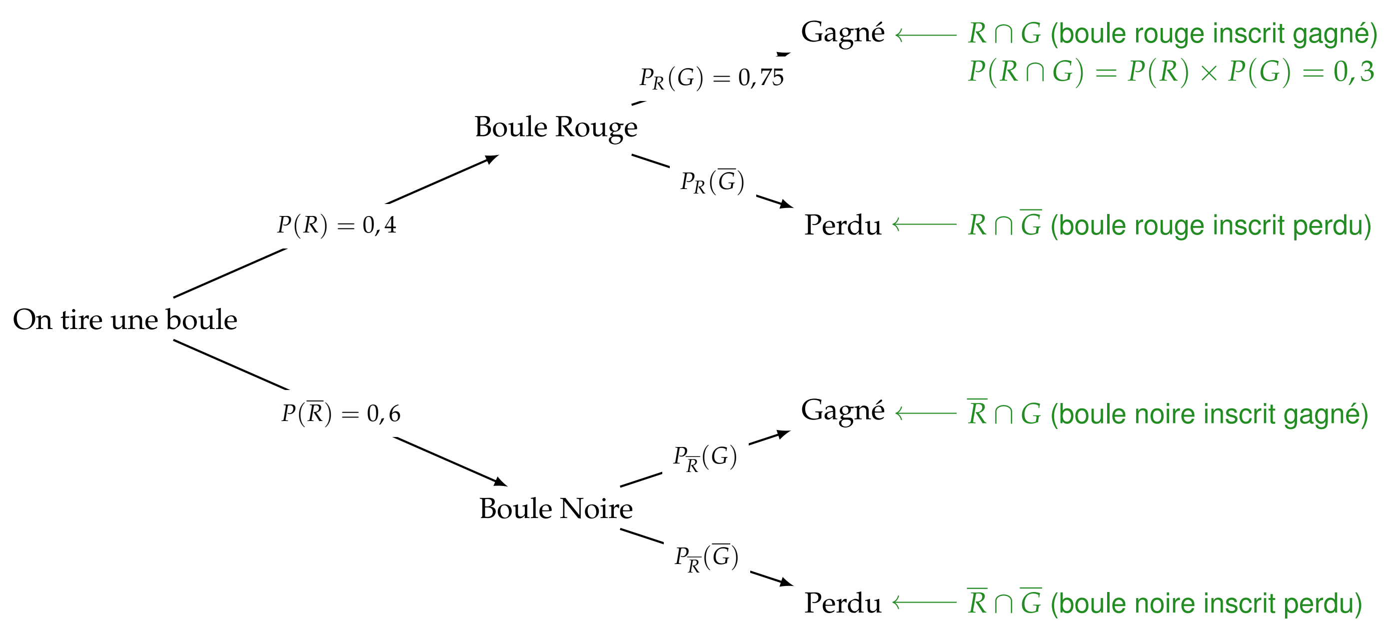
Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

II. Arbre pondéré

1) Exemple

Exemple : On reprend l'exemple étudié au paragraphe I. L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) Règles

Règle

La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.

Exemples :

- A partir du noeud « *On tire une boule* », on a : $P(R) + P(\overline{R}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du noeud « *Boule rouge* », on a : $P_R(\overline{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

Règle

La probabilité d'une « *feuille* » (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

Exemple : On considère la feuille $R \cap G$. On a :
$P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

Règle

Formule des probabilités totales
La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

Exemple : L'événement « *On tire une boule marquée Gagné* » est associé aux feuilles $R \cap G$ et $\overline{R} \cap G$.
On a :

$P(R \cap G) = 0,3$ et $P(\overline{R} \cap G) = \dfrac{9}{50} = 0,18$
(Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)
Donc $P(G) = P(R \cap G) + P(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48$.

III. Probabilités et indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque On a également : A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement « *On tire un roi* ».
Soit T l'événement « *On tire un trèfle* ».
Alors $R \cap T$ est l'événement « *On tire le roi de trèfle* ».

On a :
$P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(T) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \dfrac{1}{32}$
Donc $P(R) \times P(T) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = P(R \cap T)$
Les événements R et T sont donc indépendants. Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :
On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Ainsi : $P(R) = \dfrac{4}{34} = \dfrac{2}{17}$, $P(T) = \dfrac{8}{34} = \dfrac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \dfrac{1}{34}$
Donc $P(R) \times P(T) = \dfrac{2}{17} \times \dfrac{4}{17} = \dfrac{8}{289} \neq P(R \cap T)$
Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Propriété

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exemple : Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7.
Soit A l'événement « *On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6.* »
Soit B l'événement « *On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7.* »
On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Alors les événements $\overline{A}$ et B sont également indépendants et on a :
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0,58 \times 0,63 = 0,3654$

On peut interpréter ce résultat :
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à $36,54\%$.

2) Succession de deux épreuves indépendantes

Exemples :

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
  On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition

Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :

- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
Si on répète l'expérience deux fois de suite :

- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Remarque

- ☞ Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- ☞ Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

Exemple : On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.
La probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A; B; A; C)$ est égale à :
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$