Exercices obligatoires
Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Exercice 1 – **Ex 22 p 31 du LS**
Pour chacune des suites suivantes, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{10} lorsque c'est possible.

1) $u_n = 3n + 7$
2) $u_n = \frac{n}{n+1} + 2$
3) $u_n = n^2 - 7n + 2$
4) $u_n = 2^n - 3$
5) $u_n = (-1)^n - n$
6) $u_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}n$

Exercice 2 – **Ex 33 p 32 du LS**
Pour chacune des suites définies pour tout entier naturel n, calculer les trois termes suivant le premier.

1) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 5u_{n-1} - 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + n \end{cases}$

Exercice 3 – **Ex 25 p 31 du LS**
Représenter dans un repère les cinq premiers termes des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 4n - 7$
2) $u_n = n^2 + 1$
3) $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

II. Suites arithmétiques

Exercice 4 – **Ex 26 p 31 du LS**
Les suites suivantes sont arithmétiques. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les cinq premiers termes.

1) $u_0 = 2$ et $r = 3$
2) $u_0 = 4$ et $r = -3$
3) $u_1 = 3$ et $r = \dfrac{1}{2}$
4) $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $r = \dfrac{1}{2}$

Exercice 5 – **Ex 28 p 31 du LS**
Les suites suivantes sont arithmétiques de raison r. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_2 = 2$ et $r = 4$
2) $u_5 = 7$ et $r = -\frac{1}{2}$
3) $u_3 = 4$ et $r = 12$
4) $u_8 = \frac{37}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$

Exercice 6 – **Ex 27 p 31 du LS**
Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $u_n = 7n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_n = n^2 + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 7, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
4) $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + n + 9, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Exercice 7 – **Ex 54 p 34 du LS**
Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.

2) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.

3) La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4) La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 — Ex 55 p 34 du LS

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$.

Exercice 9 — Ex 56 p 34 du LS

À chaque fois, on donne deux termes d'une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. Déterminer la raison et le premier terme puis exprimer, u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_3 = 4$ et $u_8 = 24$.

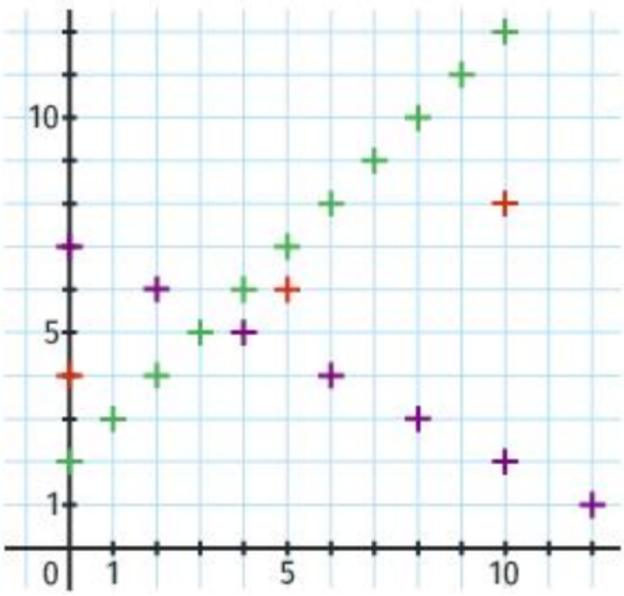
2) $u_5 = \frac{7}{4}$ et $u_9 = \frac{1}{4}$.

3) $u_{13} = 16$ et $u_{32} = -7$.

4) $u_{50} = 159$ et $u_{100} = 309$.

Exercice 10 — Ex 58 p 34 du LS

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a représenté quelques termes de trois suites arithmétiques. Pour chacune d'elle, déterminer le premier terme, la raison ainsi que l'expression de u_n en fonction de n. Donner la valeur de u_3 et u_6.



Exercice 11 — Ex 59 p 34 du LS

Lorentz place une somme de 1000 euros au taux simple annuel de 5%; c'est-à-dire que chaque année, la somme placée augmentera de 5% de la somme initiale. Pour tout entier naturel n, u_n désigne le capital de Lorentz n années après son placement.

1) Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3) Prouver que la suite (u_n) est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme u_0.

4) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5) Au bout de combien d'années le capital de Lorentz aura-t-il doublé ?

III. Somme des termes d'une suite arithmétique

Exercice 12 — Ex 60 p 34 du LS
Calculer les sommes suivantes.

1) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 73$.

2) $\mathrm{T} = 1 + 4 + 7 + \ldots + 40$.

3) $\mathrm{U} = 71 + 72 + 73 + \ldots + 100$.

4) $\mathrm{V} = 2 + 4 + 6 + \ldots + 50$.

Exercice 13 — Ex 61 p 35 du LS
Le but de l'exercice est de manipuler le symbole $\sum$.

1) Écrire chaque somme en développant puis la calculer.

a) $\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{15}(2i+1)$

b) $\mathrm{T} = \sum_{i=2}^{7}(3i-2)$

2) Écrire chaque somme avec le symbole $\sum$ puis la calculer.

a) $\mathrm{U} = 3 + 6 + 9 + \ldots + 81$

b) $V = 5 + 9 + 13 + \ldots + 45$

Exercice 14 — Ex 62 p 35 du LS
On souhaite empiler des canettes de soda de cette manière. On note c_n le nombre de canettes sur la rangée n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (c_n).

2) Conjecturer une expression de c_{n+1} en fonction de c_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la suite ?

3) En déduire le terme général c_n en fonction de n.

4) Quel est le nombre total de canettes utilisées pour sept rangées ?

5) À l'aide de la calculatrice, déterminer combien de rangées on peut dresser avec 91 canettes.

Exercice 15 — Ex 64 p 35 du LS
Une famille décide d'épargner afin de pouvoir s'offrir un voyage en Égypte. La première année, elle économise 500 euros. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de 100 euros. Pour $n \geqslant 1$, on note s_n, la somme épargnée l'année n.

1) Déterminer s_1, s_2 et s_3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.

2) En déduire l'expression de s_n en fonction de l'entier naturel $n \geqslant 1$.

3) A l'aide de la calculatrice, déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage sachant que le voyage coûte 4200 euros.

IV. Suites géométriques

Exercice 16 – **Ex 29 p 31 du LS**
On donne le premier terme et la raison q des suites géométriques suivantes. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis calculer les cinq premiers termes.

1) $v_0 = 3$ et $q = 4$

2) $v_0 = 2$ et $q = -3$

3) $v_1 = 5$ et $q = \dfrac{1}{2}$

4) $v_1 = -\dfrac{1}{4}$ et $q = 2$

Exercice 17 – **Ex 30 p 31 du LS**
Déterminer si les suites suivantes sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $v_n = 8^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $v_n = n^4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) $v_n = 2 \times 3^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) $v_n = -5 \times 2^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 3v_n + 3n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

6) $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 5 + 7v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exercice 18 – **Ex 31 p 31 du LS**
Chacune des suites suivantes est géométrique. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $v_2 = 2$ et $q = -3$

2) $v_5 = -3$ et $q = 2$

3) $v_1 = -1$ et $q = \frac{1}{3}$

4) $v_{10} = \dfrac{1}{6}$ et $q = -1$

Exercice 19 – **Ex 69 p 36 du LS** Pour chacune des suites, calculer v_{20}.

1) La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et telle que $v_3 = 12$.

2) La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -2$ et telle que $v_{31} = 32$.

3) La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 2v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4) La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_1 = 2048 \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 20 – **Ex 72 p 36 du LS** Calculer les sommes suivantes.

1) $S = 1 + 4 + 16 + \ldots + 262144$

2) $T = 3 - 6 + 12 - 24 + \ldots + 192$

3) $U = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{729}$

4) $V = 1 + 0,5 + 0,25 + \ldots + 0,03125$

Exercice 21 – **Ex 75 p 36 du LS**
Pour stocker des photos numériques, on utilise un algorithme de compression. On estime qu'à chaque niveau de compression, la taille diminue de $21,4\%$. La taille initiale d'une photo est de 4 Mo . On pose $\mathrm{T}_0 = 4$ et, pour tout entier naturel non nul n, T_n désigne la taille de cette photo après une compression de niveau n.

1) Calculer T_1 et T_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n. En déduire la nature de la suite (T_n).

3) Exprimer T_n en fonction de n.

4) Peut-on stocker 20000 photos sur une clé USB d'une capacité de 32 Go ? Avec quelle compression ?