

Chapitre 10

Colinéarité de vecteurs

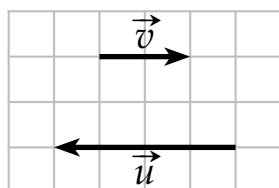
I. colinéarité de vecteurs

1) Notion de colinéarité

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'ils ont la même direction quel que soit leurs sens et leurs normes. Dans ce cas, il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Exemple :



Ici, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires avec $\vec{u} = -2\vec{v}$. On peut aussi écrire $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

2) Parallélisme et alignement

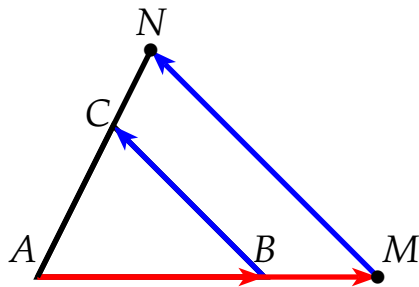
Propriété

Soient les points A, B et C du plan.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire que $(AB) // (CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à dire que A, B et C sont alignés

Exemple : ABC est un triangle. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

1) Construire une figure



2) Démontrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

3) En déduire que les points A, C, N sont alignés.

On a $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ce qui équivaut à dire que les points A, C et N sont alignés.

3) Milieux

Propriété

Soient A et B deux points du plan. I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

II. Colinéarité de vecteurs dans un repère

1) Critère de colinéarité

Propriété

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors ces 2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles, soit $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.

Si les deux vecteurs sont non nuls :

- S'ils sont colinéaires, c'est qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire $x_1 = kx_2$ et $y_1 = ky_2$. Dans ce cas, $x_1y_2 - y_1x_2 = kx_2y_2 - ky_2x_2 = 0$
- Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$. Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$

s'écrit : $yx' = xy'$. Soit $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$

Comme on a $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

☰ Méthode - Montrer que 2 vecteurs sont colinéaires

Énoncé :

- 1) Est-ce que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
- 2) Est-ce que les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Solution :

- 1) Puisque $(-5) \times (-9) - 3 \times 15 = 45 - 45 = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- 2) Puisque $7 \times (-2) - (-3) \times 4 = -14 + 12 = -2$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

2) Déterminant de deux vecteurs

💬 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

⚙️ Propriété

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

☰ Méthode - Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant

Énoncé : Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- 1) $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$
- 2) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$

Solution :

- 1) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = (-6) \times (-15) - 10 \times 9 = 90 - 90 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
- 2) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

III. Application

☰ Méthode - Appliquer la colinéarité

Enoncé : On considère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $A(-1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(-2; -3)$, $D(6; -1)$, $E(5; 0)$, 5 points du plan.

- 1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- 2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Solution :

$$1) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} = \begin{pmatrix} 6 - (-2) \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\vec{CD} = 2\vec{AB}$ donc les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont proportionnelles, et on en déduit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

$$2) \vec{EB} = \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{ED} = \begin{pmatrix} 6 - 5 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{EB}; \vec{ED}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-1) - 2 \times 1 = 0$$

Les coordonnées de $\vec{EB}$ et $\vec{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs. On en déduit que les vecteurs $\vec{EB}$ et $\vec{ED}$ sont colinéaires.
Les points E, B et D sont donc alignés.

IV. Vecteur directeur d'une droite

😊 Définition

Soit D une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D .

☰ Méthode - Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Énoncé : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4 .

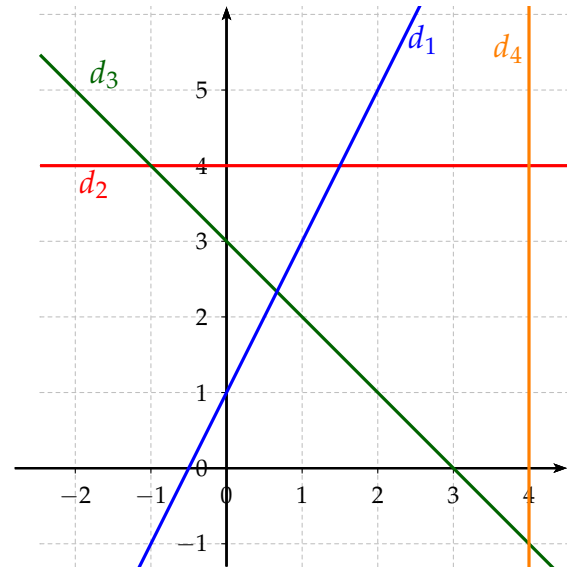
Réponse : Il suffit de partir d'un point de la droite et de se déplacer horizontalement puis verticalement et de noter de combien d'unités on s'est déplacé.

Pour d_1 : $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{c} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Pour d_2 : $\vec{d} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour d_3 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour d_4 : $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$



V. Équation cartésienne d'une droite

💬 Définition

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Un vecteur directeur de D est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D .

✍ Démonstration

Soit $A(x_0; y_0)$ un point de la droite D et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D .

Un point $M(x; y)$ appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ et

$\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ soit encore $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$

Donc :

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$$

$$\beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0$$

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$$

Cette équation peut s'écrire : $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

🔗 **Exemple :** Soit une droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

🔑 Théorème

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Ce théorème est admis. La démonstration n'est pas obligatoire

1) Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

☰ Méthode - O

On considère un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(5; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Soit un point $M(x; y)$ de la droite d .

Les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit :

$$\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \iff 3(x-5) - (-2) \times (y-2) = 0.$$

Soit encore : $3x + 2y - 19 = 0$.

Une équation cartésienne de d est : $3x + 2y - 19 = 0$.

🔗 **Remarque** On peut utiliser une autre méthode. En effet, $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur qui répond à la propriété :

Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

On connaît donc les valeurs de a et b dans notre équation cartésienne qui est donc du type $3x + 2y + c = 0$.

en connaissant $A(5; 2)$, on sait que quand $x = 5$, alors $y = 2$. On peut donc remplacer x et y par 5 et 2 dans notre équation précédente. Il ne restera alors qu'une inconnue à déterminer : c .

2) Déterminer une équation de droite à partir de 2 points

☰ Méthode - Déterminer une équation de droite à partir de 2 points

On considère un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$.

Comme la droite d' passe par les points B et C , cela signifie que $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur (ou $\overrightarrow{CB}$).

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur qui répond à la propriété :

Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

On connaît donc les valeurs de a et b dans notre équation cartésienne qui est donc du type $-6x + 4y + c = 0$.

On sait que $B(5;3)$, donc quand $x = 5$, alors $y = 3$. D'où : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$ (en divisant par -2 des 2 côtés de l'équation).