Correction - Exercices obligatoires
Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Exercice 1 — Ex 22 p 31 du LS
Pour chacune des suites suivantes, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{10} lorsque c'est possible.

1) $u_n = 3n + 7$

$$u_0 = 3 \times 0 + 7 = 7; u_1 = 3 \times 1 + 7 = 10; u_2 = 3 \times 2 + 7 = 13$$
$$u_3 = 3 \times 3 + 7 = 16; u_{10} = 3 \times 10 + 7 = 37$$

2) $u_n = \frac{n}{n+1} + 2$

$$u_0 = \frac{0}{0+1} + 2 = 2; u_1 = \frac{1}{1+1} + 2 = \frac{5}{2}; u_2 = \frac{2}{2+1} + 2 = \frac{8}{3}$$
$$u_3 = \frac{3}{3+1} + 2 = \frac{11}{4}; u_{10} = \frac{10}{10+1} + 2 = \frac{32}{11}$$

3) $u_n = n^2 - 7n + 2$

$$u_0 = 0^2 - 7 \times 0 + 2 = 2; u_1 = 1^2 - 7 \times 1 + 2 = -4$$
$$u_2 = 2^2 - 7 \times 2 + 2 = -8; u_3 = 3^2 - 7 \times 3 + 2 = -10$$
$$u_{10} = 10^2 - 7 \times 10 + 2 = 32$$

4) $u_n = 2^n - 3$

$$u_0 = 2^0 - 3 = -2; u_1 = 2^1 - 3 = -1; u_2 = 2^2 - 3 = 1$$
$$u_3 = 2^3 - 3 = 5; u_{10} = 2^{10} - 3 = 1021$$

5) $u_n = (-1)^n - n$

$$u_0 = (-1)^0 - 0 = 1; u_1 = (-1)^1 - 1 = -2; u_2 = (-1)^2 - 2 = -1$$
$$u_3 = (-1)^3 - 3 = -4; u_{10} = (-1)^{10} - 10 = -9$$

6) $u_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}n$

$$u_0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 0 = \frac{3}{4}; u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4}$$
$$u_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 3 = 0; u_{10} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 10 = -\frac{7}{4}$$

Exercice 2 — Ex 33 p 32 du LS
Pour chacune des suites définies pour tout entier naturel n, calculer les trois termes suivant le premier.

1) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n \end{cases}$

$$u_0 = 2 ; u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$$
$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$$
$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times 11 + 1 = 23$$
$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times 23 + 1 = 47$$

2) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$

$$u_0 = 1 ; u_1 = u_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$
$$u_2 = u_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 ;$$
$$u_3 = u_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$
$$u_4 = u_3^2 + 1 = 26^2 + 1 = 677$$

3) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 5u_{n-1} - 2 \end{cases}$

$$u_1 = 1 ;$$
$$u_2 = \frac{1}{u_1 + 2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$
$$u_3 = \frac{1}{u_2 + 2} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 2} = \frac{3}{7}$$
$$u_4 = \frac{1}{u_3 + 2} = \frac{1}{\frac{3}{7} + 2} = \frac{7}{17}$$
$$u_5 = \frac{1}{u_4 + 2} = \frac{1}{\frac{7}{17} + 2} = \frac{17}{41}$$

4) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$

$$u_0 = 1 ; u_1 = \sqrt{u_0^2 + 1} = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$$
$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{3} ; u_3 = \sqrt{u_2^2 + 1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$
$$u_4 = \sqrt{u_3^2 + 1} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

5) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + n \end{cases}$

Exercice 3 — **Ex 25 p 31 du LS**

Représenter dans un repère les cinq premiers termes des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 4n - 7$ **2)** $u_n = n^2 + 1$ **3)** $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

II. Suites arithmétiques

Exercice 4 — **Ex 26 p 31 du LS**

Les suites suivantes sont arithmétiques. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les cinq premiers termes.

1) $u_0 = 2$ et $r = 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$

$$\begin{aligned}
u_0 &= 2 \\
u_1 &= u_0 + 3 = 2 + 3 = 5 \\
u_2 &= u_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \\
u_3 &= u_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \\
u_4 &= u_3 + 3 = 11 + 3 = 14
\end{aligned}$$

2) $u_0 = 4$ et $r = -3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3$

$$\begin{aligned}
u_0 &= 4 \\
u_1 &= u_0 - 3 = 4 - 3 = 1 \\
u_2 &= u_1 - 3 = 1 - 3 = -2 \\
u_3 &= u_2 - 3 = -2 - 3 = -5 \\
u_4 &= u_3 - 3 = -5 - 3 = -8
\end{aligned}$$

3) $u_1 = 3$ et $r = \dfrac{1}{2}$

Pour tout entier $n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
u_1 &= 3 \\
u_2 &= u_1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \\
u_3 &= u_2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\
u_4 &= u_3 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\
u_5 &= u_4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5
\end{aligned}$$

4) $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $r = \dfrac{1}{2}$

Pour tout entier $n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{3}{4} \\
u_2 &= u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \\
u_3 &= u_2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \\
u_4 &= u_3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \\
u_5 &= u_4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 5 — **Ex 28 p 31 du LS**

Les suites suivantes sont arithmétiques de raison r. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite étant arithmétique, on sait que le terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = u_p + (n-p)r$. On obtient donc :

1) $u_2 = 2$ et $r = 4$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n = u_2 + (n-2) \times r_{\text{donc}}\ u_n = 2 + 4(n-2) = 4n - 6$

2) $u_5 = 7$ et $r = -\frac{1}{2}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n = u_5 + (n-5) \times r_{\text{donc}}\ u_n = 7 - \frac{1}{2}(n-5) = -\frac{1}{2}n + \frac{19}{2}$

3) $u_3 = 4$ et $r = 12$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, u_n = u_3 + (n-3) \times r$ donc

$$u_n = 4 + 12(n-3) = 12n - 32$$

4) $u_8 = \frac{37}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$

Pour tout entier, $n \in \mathbb{N}, u_n = u_8 + (n-8) \times r$ donc

$$u_n = \frac{37}{2} - \frac{1}{4}(n-8) = -\frac{1}{4}n + \frac{41}{2}$$

Exercice 6 — **Ex 27 p 31 du LS**

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $u_n = 7n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = -3, u_1 = 7 \times 1 - 3 = 4 \text{ et } u_2 = 7 \times 2 - 3 = 11$$

On a $u_1 - u_0 = 7$ et $u_2 - u_1 = 7$, la suite semble arithmétique. Il faut vérifier pour tout n entier naturel.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 7(n+1) - 3 = 7n + 4$ D'où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 7n + 4 - (7n - 3) = 7n + 4 - 7n + 3 = 7$$

La suite est donc bien arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $u_0 = -3$.
Remarque : On peut également reconnaître que u_n est de la forme $u_0 + nr$ et déduire directement que (u_n) est arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $u_0 = -3$.

2) $u_n = n^2 + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 4, u_1 = 1 + 4 = 5 \text{ et } u_2 = 2^2 + 4 = 8.$$

On a $u_2 - u_1 = 3$ et $u_1 - u_0 = 1$. La suite n'est donc pas arithmétique.

3) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 7, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

On calcule les premiers termes :

$$u_1 = 2 \times 1 + 7 = 9 \text{ et } u_2 = 2 \times 9 + 7 = 25$$

On a $u_2 - u_1 = 16$ et $u_1 - u_0 = 8$. La suite n'est pas arithmétique.

4) $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + n + 9, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

On calcule les premiers termes :

$$u_2 = u_1 + 1 + 9 = -3 + 1 - 9 = 7$$
$$u_3 = u_2 + 2 + 9 = 7 + 2 + 9 = 18$$
$$\text{On a } u_3 - u_2 = 11 \text{ et } u_2 - u_1 = 10$$

La suite n'est pas arithmétique.

Exercice 7 — Ex 54 p 34 du LS

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.

Comme la suite est arithmétique de premier terme $u_7 = 12$ et de raison $r = 3$, on peut écrire son terme général sous la forme $u_n = u_p + (n-p)r$ soit ici : $u_n = u_7 + (n-7) \times 3$. On a donc $u_{20} = 12 + (20-7) \times 3 = 12 + 13 \times 3 = 51$.

2) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.

Comme la suite est arithmétique avec $u_{25} = 17$ et de raison $r = 5$, on peut écrire son terme général sous la forme $u_n = u_p + (n-p)r$ soit ici : $u_n = u_{25} + (n-25) \times 5$. On a donc $u_{20} = 17 + (20-25) \times 5 = 17 + (-5) \times 5 = -8$.

3) La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est arithmétique car $u_{n+1} - u_n = 7$. La raison est donc 7 et le premier terme $u_0 = 3$.
On peut donc écrire le terme général sous la forme $u_n = u_p + (n-p)r$ soit ici :

$$u_n = u_0 + n \times 7$$

On a donc $u_{20} = 3 + 20 \times 7 = 3 + 20 \times 7 = 143$.

4) La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est arithmétique car $u_{n+1} - u_n = -4$. La raison est donc -4 et le premier terme $u_1 = -2$. On peut donc écrire le terme général sous la forme $u_n = u_p + (n-p)r$ soit ici : $u_n = u_1 + (n-1) \times (-4)$. On a donc $u_{20} = -78$.

Exercice 8 — Ex 55 p 34 du LS

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

On calcule les premiers termes : $u_0 = \dfrac{0+5}{0+1} = 5, u_1 = \dfrac{1+5}{1+1} = 3$ et $u_2 = \dfrac{2+5}{2+1} = \dfrac{7}{3}$ On a $u_2 - u_1 = -\dfrac{2}{3}$ et $u_1 - u_0 = -2$. La suite n'est donc pas arithmétique.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$.

On calcule les premiers termes : $u_0 = \dfrac{5}{8}, u_1 = \dfrac{-3+5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ et $u_2 = \dfrac{-3 \times 2 + 5}{8} = -\dfrac{1}{8}$
On a $u_2 - u_1 = -\frac{3}{8}$ et $^{u_1} - u_0 = -\frac{3}{8}$, la suite semble arithmétique. Il faut vérifier pour tout entier naturel n.

$$u_{n+1} = \frac{-3(n+1)+5}{8} = \frac{-3n+2}{8}$$

D'où $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n+2}{8} - \dfrac{-3n+5}{8} = -\dfrac{3}{8}$. La suite est arithmétique de raison $r = -\dfrac{3}{8}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{5}{8}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$.

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = \frac{3}{3} = 1, u_1 = \frac{1^2+4\times1+3}{1+3} = \frac{8}{4} = 2_{\text{et}}\, u_2 = \frac{2^2+4\times2+3}{2+3} = \frac{15}{5} = 3$$

On a $u_2 - u_1' = 1$ et $u_1 - u_0 = 1$, la suite semble arithmétique. Il faut vérifier pour tout entier naturel n.

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+4(n+1)+3}{n+1+3}$$
$$u_{n+1} = \frac{n^2+2n+1+4n+4+3}{n+4} = \frac{n^2+6n+8}{n+4}$$
$$\text{D'où } u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+6n+8}{n+4} - \frac{n^2+4n+3}{n+3}$$
$$= \frac{\left(n^2+6n+8\right)(n+3) - \left(n^2+4n+3\right)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$
$$= \frac{n^3+3n^2+6n^2+18n+8n+24-\left(n^3+4n^2+4n^2+16n+3n+12\right)}{\left(n^2+3n+4n+12\right)}$$
$$= \frac{n^2+7n+12}{n^2+7n+12} = 1$$

La suite est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 1$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$.

On calcule les premiers termes : $u_0 = \dfrac{1}{2}, u_1 = \dfrac{2}{3}$ et $u_2 = \dfrac{5}{4}$. On a $u_2 - u_1 = \dfrac{7}{12}$ et $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{6}$. La suite n'est donc pas arithmétique.

Exercice 9 — **Ex 56 p 34 du LS**

À chaque fois, on donne deux termes d'une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. Déterminer la raison et le premier terme puis exprimer, u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

La suite étant arithmétique, on sait que le terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = u_p + (n-p)r$. On obtient :

1) $u_3 = 4$ et $u_8 = 24$.

$$u_8 = u_3 + (8-3)\times r \text{ soit } 24 = 4 + 5r \iff 20 = 5r \iff r = 4.$$
$$u_0 = u_3 + (0-3)r \iff u_0 = 4 - 3\times4 = -8$$
$$\text{Donc } u_n = -8 + 4n$$

2) $u_5 = \frac{7}{4}$ et $u_9 = \dfrac{1}{4}$.

$u_9 = u_5 + (9-5)\times r_{\text{soit}}\, \frac{1}{4} = \frac{7}{4} + 4r \iff -\frac{6}{4} = 4r \iff r = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$.

$$u_0 = u_5 + (0-5)r \iff u_0 = \frac{7}{4} - 5\times\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{29}{8}$$

Donc $u_n = \frac{29}{8} - \frac{3}{8}n$

3) $u_{13} = 16$ et $u_{32} = -7$.

$u_{32} = u_{13} + (32-13) \times r_{\text{soit}}\ -7 = 16 + 19r \iff -23 = 19r \iff r = -\frac{23}{19}$

$$u_0 = u_{13} + (0-13)r \iff u_0 = 16 - 13 \times \left(-\frac{23}{19}\right) = \frac{603}{19}$$

Donc $u_n = \frac{603}{19} - \frac{23}{19}n$

4) $u_{50} = 159$ et $u_{100} = 309$.

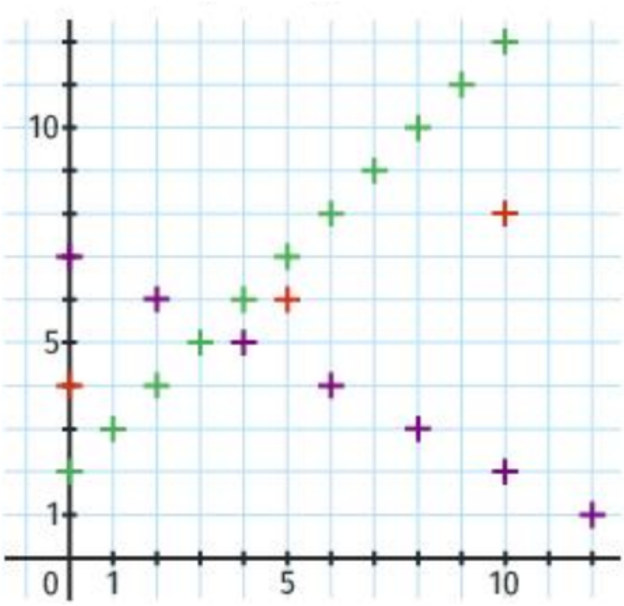
d. $u_{100} = u_{50} + (100-50) \times r_{\text{soit}}\ 309 = 159 + 50r \iff 150 = 50r \iff r = 3$.

$$u_0 = u_{50} + (0-50)r \iff u_0 = 159 - 50 \times 3 = 9$$

Donc $u_n = 9 + 3n$

Exercice 10 — **Ex 58 p 34 du LS**

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a représenté quelques termes de trois suites arithmétiques. Pour chacune d'elle, déterminer le premier terme, la raison ainsi que l'expression de u_n en fonction de n. Donner la valeur de u_3 et u_6.



Pour les points verts :
Le premier terme est $u_0 = 2$. La raison est $r = 1$. On a donc $u_n = 2 + n$. $u_3 = 5$ et $u_6 = 8$.
Pour les points rouges :
Le premier terme est $u_0 = 4$. Comme $u_0 = 4$ et $u_5 = 6$ et que la suite est arithmétique, on a $u_5 = u_0 + (5-0) \times r$

$$\text{soit } 6 = 4 + 5r \iff 2 = 5r \iff r = \frac{2}{5}$$

La raison est $r = \frac{2}{5}$. On a donc $u_n = 4 + \frac{2}{5}n$.

$$u_3 = 4 + \frac{2}{5} \times 3 = \frac{26}{5} \text{ et } u_6 = 4 + \frac{2}{5} \times 6 = \frac{32}{5}$$

Pour les points violets :
Le premier terme est $u_0 = 7$. Comme $u_0 = 7$ et $u_2 = 6$ et que la suite est arithmétique, on a $u_2 = u_0 + (2-0) \times r$

$$\text{soit } 6 = 7 + 2r \iff -1 = 2r \iff r = -\frac{1}{2}$$

La raison est $r = -\frac{1}{2}$. On a donc $u_n = 7 - \frac{1}{2}n$.

$$u_3 = 7 - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{11}{2} \text{ et } u_6 = 7 - \frac{1}{2} \times 6 = 4$$

Exercice 11 — **Ex 59 p 34 du LS**
Lorentz place une somme de 1000 euros au taux simple annuel de 5% ; c'est-à-dire que chaque année, la somme placée augmentera de 5% de la somme initiale. Pour tout entier naturel n, u_n désigne le capital de Lorentz n années après son placement.

1) Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1000 \\ u_1 &= 1000 + \frac{5}{100} \times 1000 = 1050 \\ u_2 &= 1050 + \frac{5}{100} \times 1000 = 1100 \\ u_3 &= 1100 + \frac{5}{100} \times 1000 = 1150 \end{aligned}$$

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 1000 = u_n + 50$.

3) Prouver que la suite (u_n) est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme u_0.

$u_{n+1} - u_n = 50$. La suite est donc arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_0 = 1000$.

4) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

On sait que la suite est arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_0 = 1000$ donc, pour tout entier naturel $n, u_n = 1000 + 50n$.

5) Au bout de combien d'années le capital de Lorentz aura-t-il doublé ?

On veut trouver n tel que $u_n = 2000$ soit :

$$1000 + 50n = 2000 \Longleftrightarrow 50n = 1000 \Longleftrightarrow n = 20.$$
$$1000 + 50n = 2000 \Longleftrightarrow 50n = 1000 \Longleftrightarrow n = 20.$$

Au bout de 20 ans, le capital de Lorentz aura doublé.

III. Somme des termes d'une suite arithmétique

Exercice 12 — **Ex 60 p 34 du LS**
Calculer les sommes suivantes.

1) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 73$.

D'après la formule $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$S = \frac{73 \times 74}{2} = 2701$$

2) $\mathrm{T} = 1 + 4 + 7 + \ldots + 40$.

$$T = 1 + (1+3\times1) + (1+3\times2) + (1+3\times3) + \cdots + (1+3\times13)$$
$$T = 1\times14 + 3\times(1+2+3+\cdots+13)$$
$$T = 14 + 3\times\frac{13\times14}{2} = 14 + 3\times91 = 287$$

Autre méthode :
Les termes $1;4;7;10;\ldots$ sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$. La somme de $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$. On a donc la somme $T = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{13}$ D'où $T = 14\times\frac{1+40}{2} = 287$

3) $\text{U} = 71 + 72 + 73 + \ldots + 100$.

$$U = (70+1) + (70+2) + (70+3) + \cdots + (70+30)$$
$$U = 70\times30 + (1+2+3+\cdots+30)$$
$$U = 2100 + \frac{30\times31}{2} = 2100 + 465 = 2565$$

Autre méthode :
Les termes $71;72;73;\ldots$ sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 71 et de raison 1. On a donc la somme $U = 30\times\frac{71+100}{2} = 2565$

4) $\text{V} = 2 + 4 + 6 + \ldots + 50$.

$$V = 2\times(1+2+3+\cdots+25)$$
$$V = 2\times\left(\frac{25\times26}{2}\right) = 650$$

Autre méthode :
Les termes $2;4;6;\ldots$ sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2. On a donc la somme $U = 25\times\frac{2+50}{2} = 650$

Exercice 13 – **Ex 61 p 35 du LS**
Le but de l'exercice est de manipuler le symbole $\sum$.

1) Écrire chaque somme en développant puis la calculer.

a) $\text{S} = \sum_{i=0}^{15}(2i+1)$

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 31$$
$$S = 16\times1 + 2(1+2+\cdots+15)$$
$$S = 16 + 2\times\frac{15\times16}{2} = 256$$

b) $\text{T} = \sum_{i=2}^{7}(3i-2)$

$$T = 4 + 7 + 10 + \cdots + 19$$
$$T = 6\times(-2) + 3(2+3+\cdots+7)$$
$$T = -12 + 3\times\left(\frac{7\times8}{2} - 1\right) = -12 + 81 = 69$$

2) Écrire chaque somme avec le symbole $\sum$ puis la calculer.

a) $\text{U} = 3 + 6 + 9 + \ldots + 81$

$$U = \sum_{i=1}^{27} 3i$$
$$U = 3(1+2+3+\cdots+27) = 3\times\frac{27\times28}{2} = 1134$$

b) $V = 5 + 9 + 13 + \ldots + 45$

$$V = \sum_{i=0}^{10}(5+4i)$$
$$V = 5 \times 11 + 4 \times \frac{10 \times 11}{2} = 275$$

Exercice 14 – **Ex 62 p 35 du LS**

On souhaite empiler des canettes de soda de cette manière. On note c_n le nombre de canettes sur la rangée n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (c_n).

$c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 4$ et $c_5 = 5$.

2) Conjecturer une expression de c_{n+1} en fonction de c_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la suite ?

Pour tout entier $n \geqslant 1, c_{n+1} = c_n + 1$. La suite est donc arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $c_1 = 1$.

3) En déduire le terme général c_n en fonction de n.

On a donc, pour tout entier $n \geqslant 1, c_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$.

4) Quel est le nombre total de canettes utilisées pour sept rangées ?

Pour 7 niveaux, on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = \frac{7 \times 8}{2} = 28$$

On utilise 28 canettes pour 7 niveaux.

5) À l'aide de la calculatrice, déterminer combien de rangées on peut dresser avec 91 canettes.

On cherche n tel que $\frac{n(n+1)}{2} = 91$.
On résout $91 = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\iff 182 = n^2 + n \iff n^2 + n - 182 = 0.$$

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 182 = 729$. Les solutions sont $n_1 = \dfrac{-1-27}{2} = -14_{\text{et}}\ n_2 = \dfrac{-1+27}{2} = 13$. Seule la solution positive est valide. Il y aura donc 13 rangées.

Exercice 15 – **Ex 64 p 35 du LS**

Une famille décide d'épargner afin de pouvoir s'offrir un voyage en Égypte. La première année, elle économise 500 euros. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de 100 euros. Pour $n \geqslant 1$, on note s_n, la somme épargnée l'année n.

1) Déterminer s_1, s_2 et s_3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.

$s_1 = 500, s_2 = 600$ et $s_3 = 700$
Pour tout entier $n \geqslant 1, s_{n+1} = s_n + 100$.

2) En déduire l'expression de s_n en fonction de l'entier naturel $n \geqslant 1$.

La suite est arithmétique de raison $r = 100$ et de premier terme $u_1 = 500$ donc $u_n = 500 + (n-1) \times 100$ soit $u_n = 100n + 400$.

3) A l'aide de la calculatrice, déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage sachant que le voyage coûte 4200 euros.

La somme totale épargnée est $S = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = n \times \frac{s_1+s_n}{2}$. On doit résoudre $S \geqslant 4200$

$$\begin{aligned}
&\iff n \times \frac{500 + 100n + 400}{2} \geq 4200 \\
&\iff 100n^2 + 900n \geq 8400 \\
&\iff 100n^2 + 900n - 8400 \geq 0
\end{aligned}$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 900^2 + 4 \times 8400 = 4170000$$

Les racines sont :

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{-900 - \sqrt{4170000}}{200} = \frac{-9 - \sqrt{417}}{2} < 0 \\
\text{et } n_2 &= \frac{-900 + \sqrt{4170000}}{200} = \frac{-9 + \sqrt{417}}{2} \approx 5{,}7.
\end{aligned}$$

Le polynôme est du signe de $a = 100$ donc positif à l'extérieur des racines. La famille pourra donc partir en voyage au bout de 6 ans.

IV. Suites géométriques

Exercice 16 — Ex 29 p 31 du LS

On donne le premier terme et la raison q des suites géométriques suivantes. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis calculer les cinq premiers termes.

1) $v_0 = 3$ et $q = 4$

Pour tout entier, $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 4 \times v_n$.

$$\begin{aligned} v_0 &= 3 \\ v_1 &= 4 \times 3 = 12 \\ v_2 &= 4 \times 12 = 48 \\ v_3 &= 4 \times 48 = 192 \\ v_4 &= 4 \times 192 = 768 \end{aligned}$$

2) $v_0 = 2$ et $q = -3$

Pour tout entier, $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -3 \times v_n$

$$\begin{aligned} v_0 &= 2 \\ v_1 &= -3 \times 2 = -6 \\ v_2 &= -3 \times (-6) = 18 \\ v_3 &= -3 \times 18 = -54 \\ v_4 &= -3 \times (-54) = 162 v_4 = -3 \times (-54) = 162 \end{aligned}$$

3) $v_1 = 5$ et $q = \frac{1}{2}$

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, {}^{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \times v_n$

$$\begin{aligned} v_0 &= 5 \\ v_1 &= \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} \\ v_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \\ v_3 &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \\ v_4 &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

4) $v_1 = -\frac{1}{4}$ et $q = 2$

Pour tout entier, $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2 \times v_n$

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{4} \\ v_1 &= 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \\ v_2 &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \\ v_3 &= 2 \times (-1) = -2 \\ v_4 &= 2 \times (-2) = -4 \end{aligned}$$

Exercice 17 — Ex 30 p 31 du LS

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $v_n = 8^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les premiers termes :

$$v_0 = 8^0 = 1$$
$$v_1 = 8^1 = 8$$
$$v_2 = 8^2 = 64$$
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{64}{8} = 8 \quad \text{et } \frac{v_1}{v_0} = \frac{8}{1} = 8 = \frac{v_2}{v_1}$$

La suite semble donc géométrique. Il faut vérifier pour tout entier n.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 8^{n+1} = 8^n \times 8 = 8 \times v_n$.
La suite est donc bien géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 1$.
Remarque : On peut également reconnaître la forme q^n et déduire que la suite est géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2) $v_n = n^4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les premiers termes :

$$v_0 = 0^4 = 0$$
$$v_1 = 1^4 = 1$$
$$v_2 = 2^4 = 16$$
$$v_3 = 3^4 = 81$$
$$\text{On a } \frac{v_3}{v_2} = \frac{81}{16} \text{et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{16}{1} = 16 \neq \frac{v_3}{v_2}$$

La suite n'est donc pas géométrique.

3) $v_n = 2 \times 3^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les premiers termes :

$$v_0 = 2 \times 3^0 = 2$$
$$v_1 = 2 \times 3^1 = 6$$
$$v_2 = 2 \times 3^2 = 18$$
$$\text{On a } \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{18}{6} = 3 \quad \text{et } \frac{v_1}{v_0} = \frac{6}{2} = 3 = \frac{v_2}{v_1}$$

La suite semble donc géométrique. Il faut vérifier pour tout entier n.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = 3 \times v_n$.
La suite est donc bien géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 2$.
Remarque : On peut également reconnaître la forme $v_0 \times q^n$ et déduire que la suite est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 2$.

4) $v_n = -5 \times 2^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les premiers termes :

$$v_0 = -5 \times 2^{0+1} = -10$$
$$v_1 = -5 \times 2^{1+1} = -20$$
$$v_2 = -5 \times 2^{2+1} = -40$$
$$\text{On a } \frac{v_2}{v_1} = \frac{-40}{-20} = 2 \text{ et } \quad \frac{v_1}{v_0} = \frac{-20}{-10} = 2 = \frac{v_2}{v_1}$$

La suite semble donc géométrique. Il faut vérifier pour tout entier n.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -5 \times 2^{n+1+1} = -5 \times 2^{n+1} \times 2 = 2 \times v_n$.
La suite est donc bien géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -10$.
Remarque : On peut également reconnaître la forme $v_0 \times q^n = -5 \times 2 \times 2^n = -10 \times 2^n$ et déduire que

la suite est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -10$.

5) $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 3v_n + 3n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

On calcule les premiers termes :

$$v_1 = 3v_0 + 3 \times 0 = 3 \times 1 + 3 \times 0 = 3$$

$$v_2 = 3v_1 + 3 \times 1 = 3 \times 3 + 3 \times 1 = 12$$

On a donc $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{12}{3} = 4$ et $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{3}{1} = 3 \neq \dfrac{v_2}{v_1}$. La suite n'est donc pas géométrique.

6) $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 5 + 7v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

On calcule les premiers termes :

$$v_1 = 5 + 7v_0 = 5 + 7 \times 2 = 19$$
$$v_2 = 5 + 7v_1 = 5 + 7 \times 19 = 138$$

On a donc $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{138}{19} \approx 7{,}26$ et $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{19}{2} \approx 6{,}33 \neq \dfrac{v_2}{v_1}$. La suite n'est donc pas géométrique.

Exercice 18 — **Ex 31 p 31 du LS**

Chacune des suites suivantes est géométrique. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite étant géométrique, on sait que le terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = u_p \times q^{n-p}$. On obtient donc :

1) $v_2 = 2$ et $q = -3$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n = v_2 \times q^{n-2}$ soit $v_n = 2 \times (-3)^{n-2} = 2 \times (-3)^n \times (-3)^{-2}$ D'où $v_n = \dfrac{2}{9} \times (-3)^n$

2) $v_5 = -3$ et $q = 2$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n = v_5 \times q^{n-5}$ soit $v_n = -3 \times 2^{n-5} = -3 \times 2^n \times 2^{-5}$ D'où $v_n = -\dfrac{3}{32} \times 2^n$

3) $v_1 = -1$ et $q = \dfrac{1}{3}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n = v_1 \times q^{n-1}$ soit

$$v_n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\text{D'où } v_n = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4) $v_{10} = \dfrac{1}{6}$ et $q = -1$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n = v_{10} \times q^{n-10}$ soit

$$v_n = \frac{1}{6} \times (-1)^{n-10} = \frac{1}{6} \times (-1)^n \times (-1)^{-10}$$

$$\text{D'où } v_n = \frac{1}{6} \times (-1)^n \text{ car } (-1)^{-10} = 1$$

Exercice 19 — **Ex 69 p 36 du LS** Pour chacune des suites, calculer v_{20}.

1) La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et telle que $v_3 = 12$.

Comme la suite est géométrique de premier terme $v_3 = 12$ et de raison $q = 3$, on peut écrire son terme général sous la forme $v_n = v_p q^{n-p}$ soit ici : $v_n = v_3 \times q^{n-3}$.
On a donc $v_{20} = 12 \times 3^{20-3} = 12 \times 3^{17} = 1549681956$.

2) La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -2$ et telle que $v_{31} = 32$.

Comme la suite est géométrique de premier terme $v_{31} = 32$ et de raison $q = -2$, on peut écrire son terme général sous la forme $v_n = v_p q^{n-p}$ soit ici : $v_n = v_{31} \times q^{n-31}$.
On a donc $v_{20} = 32 \times (-2)^{20-31} = 32 \times (-2)^{-11} = -\frac{1}{64}$

3) La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 2v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

La suite (v_n) est géométrique car $v_{n+1} = 2v_n$. La raison est donc $q = 2$ et le premier terme $v_0 = -5$.
On peut donc écrire le terme général sous la forme $v_n = v_p q^{n-p}$ soit ici : $v_n = v_0 \times 2^{n-0}$.
On a donc $v_{20} = v_0 \times 2^{20-0} = -5 \times 2^{20} = -5242880$.

4) La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_1 = 2048 \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

La suite (v_n) est géométrique car $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$. La raison est donc $q = -\frac{1}{2}$ et le premier terme $v_1 = 2048$. On peut donc écrire le terme général sous la forme $v_n = v_p q^{n-p}$ soit ici :

$$v_n = v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{On a donc } v_{20} = v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{20-1} = 2048 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{19} = -\frac{1}{256}$$

Exercice 20 — **Ex 72 p 36 du LS** Calculer les sommes suivantes.

D'après la formule $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, on obtient :

1) $S = 1 + 4 + 16 + \ldots + 262144$

$$S = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^9 = \frac{1-4^{10}}{1-4}$$

$$S = \frac{1\,048\,576 - 1}{3} = 349\,525$$

2) $T = 3 - 6 + 12 - 24 + \ldots + 192$

$$T = 3(1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 64) = 3\left(1 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots + (-2)^6\right)$$

$$T = 3 \times \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}$$

$$T = 3 \times \frac{129}{3} = 129$$

3) $U = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{729}$

$$U = 9\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{6561}\right)$$
$$U = 9\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \cdots + \frac{1}{3^8}\right)$$
$$U = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9\,841}{729}$$

4) $V = 1 + 0,5 + 0,25 + \ldots + 0,03125$

$$V = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^5} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

Exercice 21 — **Ex 75 p 36 du LS**

Pour stocker des photos numériques, on utilise un algorithme de compression. On estime qu'à chaque niveau de compression, la taille diminue de $21,4\%$. La taille initiale d'une photo est de 4 Mo . On pose $\mathrm{T}_0 = 4$ et, pour tout entier naturel non nul n, T_n désigne la taille de cette photo après une compression de niveau n.

1) Calculer T_1 et T_2.

$$T_1 = 4 - 0,214 \times 4 = 0,786 \times 4 = 3,144$$
$$T_2 = 0,786 \times 3,144 = 2,471184$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n. En déduire la nature de la suite (T_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0,786T_n$.
La suite est donc géométrique de raison $q = 0,786$ et de premier $T_0 = 4$.

3) Exprimer T_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 4 \times 0,786^n$

4) Peut-on stocker 20000 photos sur une clé USB d'une capacité de 32 Go ? Avec quelle compression ?

La suite étant décroissante puisque $0 < q < 1$, on pourra atteindre une capacité de 32Go $=$ 32000 Mo .
On résout $20000 \times 4 \times 0,786^n < 32000$
$\iff 0,786^n < 0,4 \iff n \geqslant 4$ avec la calculatrice car $0,786^3 \approx 0,4856$ et $0,786^4 \approx 0,3817$.
Avec une compression de niveau 4, on peut stocker 20000 photos sur une clé USB de capacité 32 Go.