

Chapitre 10

Fonction exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

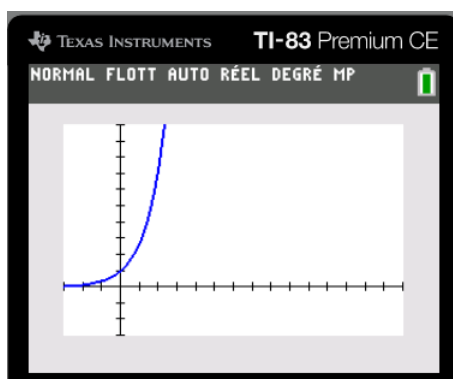
🗨 Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

➡ Conséquence

$$\exp(0) = 1$$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



⚙ Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

⚙ Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(x))' = \exp(x)$

2) Variations

⚙ Propriété

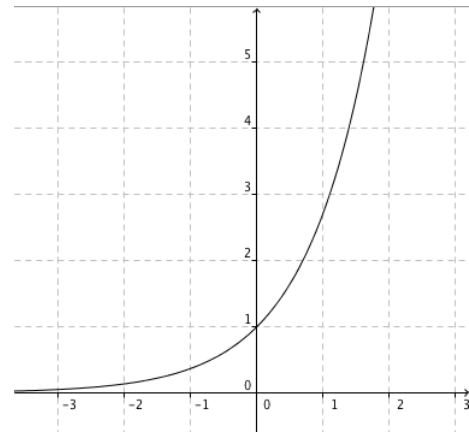
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(\exp(x))' > 0$ car $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp(x))'$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) relation fonctionnelle

🔊 Théorème

Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

📌 **Remarque** Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

💬 Corollaire

Pour tous réels x et y , on a :

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ou encore $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = \exp(x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

📝 Démonstration - Démonstration du a et b

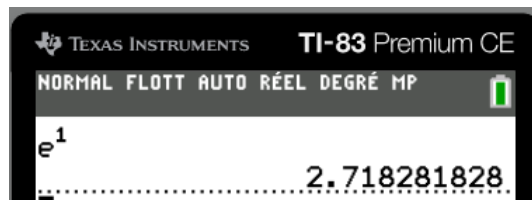
- $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$
- $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

2) Le nombre e

💬 Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
On a ainsi $\exp(1) = e$

📌 **Remarque** Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.



Notation

$\exp(x) = \exp(1 \times x) = (\exp(1))^x = e^x$
On note pour tout x réel, $\exp(x) = e^x$

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés

Pour tous réels x et y , on a :

- 1) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- 2) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$
- 3) $e^{x+y} = e^x \times e^y$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$
- 4) $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

Méthode - Dériver une fonction exponentielle

Enoncé : Dériver les fonctions suivantes.

- 1) $f(x) = 4x - 3e^x$
- 2) $g(x) = (x - 1)e^x$
- 3) $h(x) = \frac{e^x}{x}$
- 4) $j(x) = e^{3x+2}$

Réponse :

- 1) $f'(x) = 4 - 3e^x$
- 2) $g'(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$
- 3) $h'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$
- 4) $j'(x) = 3e^{3x+2}$

Méthode - Simplifier les écritures

Enoncé : Simplifier l'écriture des nombres suivants.

- 1) $A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$
- 2) $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$
- 3) $C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$
- 4) $D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Réponse :

- 1) $A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}} = e^{3-(-5)} = e^8$
- 2) $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30-3} = e^{-33}$
- 3) $C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$

$$4) D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{2x \times 3}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$$

⚙ Propriétés

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

☰ Méthode - Résoudre une équation ou une inéquation

Énoncé :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Réponse :

$$1) e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0 \iff e^{x^2-3} = e^{-2x} \iff x^2 - 3 = -2x \iff x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ ou } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Les solutions sont 3 et 1.

$$2) e^{4x-1} \geq 1 \iff e^{4x-1} \geq e^0 \iff 4x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

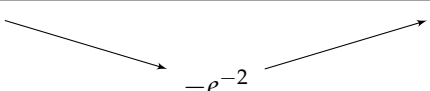
☰ Méthode - Étudier une fonction exponentielle

Énoncé : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

- 1) Calculer la dérivée de la fonction f .
- 2) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- 4) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

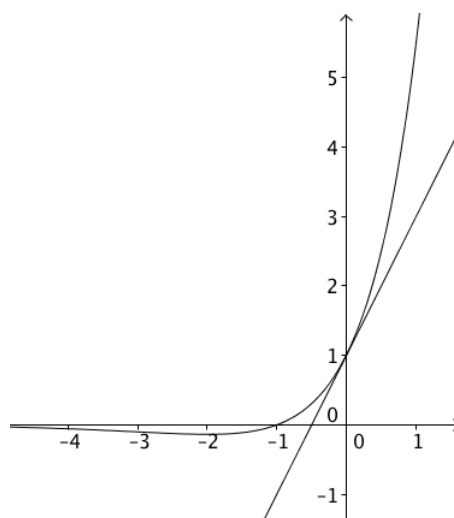
Réponse :

- 1) $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$
- 2) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.
 f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.
 On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

- 3) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
 Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit : $y = 2x + 1$

4)



IV. Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

1) variations

⚙️ Propriété

La fonction $t \mapsto e^{kt}$ avec $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \mapsto ke^{kt}$

✍️ Démonstration

On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \mapsto g(at + b)$ est $t \mapsto ag'(at + b)$. En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

🔗 **Exemple :** Soit $f(t) = e^{-4t}$ alors $f'(t) = -4e^{-4t}$.

⚙️ Propriété

- Si $k > 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est décroissante.

✍️ Démonstration

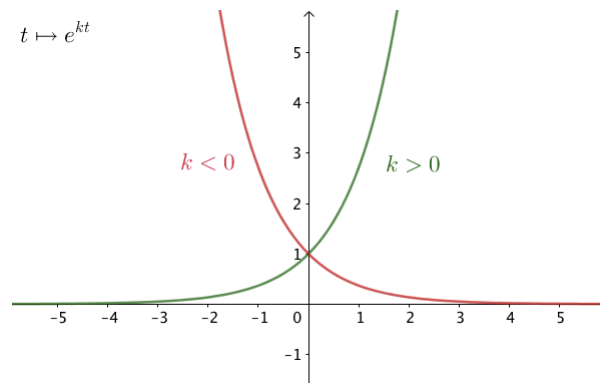
On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$

Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.

Donc le signe de la dérivée $t \mapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k .

- Si $k > 0$ alors la dérivée est positive est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante.
- Si $k < 0$ alors la dérivée est négative est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est décroissante.

2) Représentation graphique



☰ Méthode - Étudier une fonction $t \mapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Énoncé :

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

- 1) Montrer que la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
- 2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A .
- 3) Déterminer les variations de f sur $[0; 10]$.
- 4)
 - a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
 - b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Réponse :

- 1) $f'(t) = A \times 0,14e^{0,14t} = 0,14 \times Ae^{0,14t} = 0,14f(t)$.
La fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ vérifie bien l'égalité $f'(t) = 0,14f(t)$ donc elle convient.
- 2) $f(0) = Ae^{0,14 \times 0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0,14t}$.
- 3) Comme $k = 0,14 > 0$, on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{0,14t}$ est strictement croissante sur $[0; 10]$. Il en est de même pour la fonction f .
- 4)
 - a) $f(3) = 50000e^{0,14 \times 3} = 50000e^{0,42} \approx 76000$
 $f(5,5) = 50000e^{0,14 \times 5,5} = 50000e^{0,77} \approx 108000$
Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.
 - b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

X=4.96