Chapitre 11

Application de la dérivation

I. Étude des variations d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

1) Exemple d'une fonction du second degré

Méthode - Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Enoncé : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.

2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

Réponse :

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $4x - 8 = 0$
Donc $4x = 8$ et $x = \dfrac{8}{4} = 2$.
La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis ensuite positive (après $x = 2$).

3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.
La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

2) Exemple d'une fonction du troisième degré

Méthode - Dresser le tableau de variations d'une fonction polynôme du 3e degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

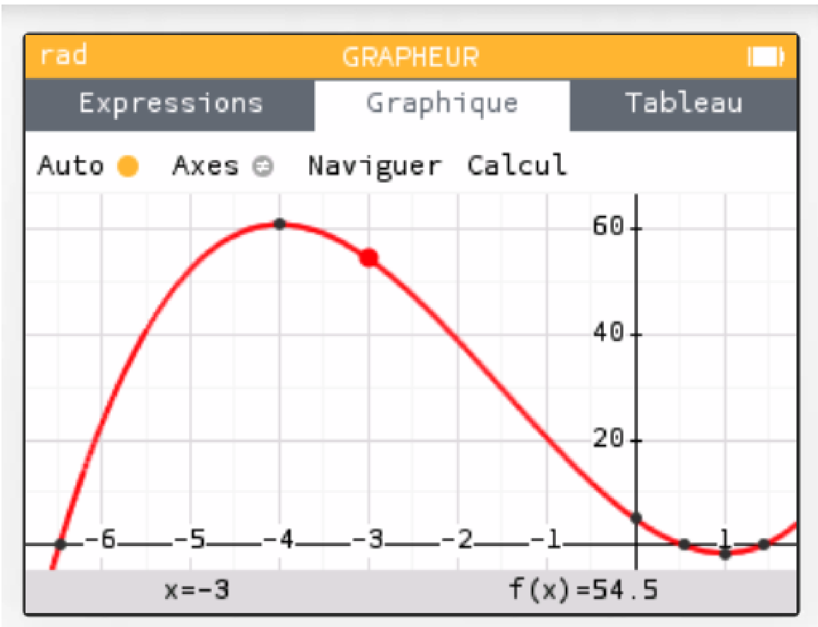
2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.
Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 92 - 4 \times 3 \times (12) = 225$
L'équation possède deux solutions : $x_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

2)



II. Extremum d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$.

Méthode - Rechercher un extremum

Enoncé :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Réponse :
Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$
Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \dfrac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{71}{20}$	$\nearrow$	

En effet : $f\left(\dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{71}{20}$
La fonction f admet donc un minimum égal à $\dfrac{71}{20}$ en $x = \dfrac{3}{10}$.

III. Position relative de deux courbes

Méthode - Position relative de deux courbes

Enoncé :
Soit f et g deux fonctions définies sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Réponse :
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 18$.

Pour tout x de $[2; +\infty[$, on a :
$h'(x) = 3x^2 + 5$
Donc $h'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
On construit le tableau de variations :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	0 $\nearrow$

$h(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$
D'après le tableau de variations, on a $h(x) \geq 0$.
Soit : $f(x) - g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq g(x)$.
On en déduit que la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.