

Chapitre 12

Variables aléatoires

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »
L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles. Il se note Ω .
On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.

Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$ Pour l'issue 1, on a : $X = 3$ Pour les issues 3 et 5, on a : $X = -4$.

Définition

Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers Ω .

2) Loi de probabilité

Définition

La **probabilité de l'événement** $\{X = x_i\}$ est la somme des probabilités des issues de X auxquelles on associe le réel x_i .

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . **Définir la loi de probabilité** de la variable aléatoire X , c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.
On présente souvent la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.
Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$. La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

De même : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarques

$P(X = x_i)$ peut se noter p_i .

$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Exemple : Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Méthode - Déterminer une loi de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2) Calculer $P(X \geq 5)$ et interpréter le résultat.

1) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.

En effet, si on tire le roi de cur, on gagne 5(roi) + 2(cur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cur (autre que le roi de cur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}.$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cur), $X = 5$.

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}.$$

- Si la carte tirée est le roi de cur, $X = 7$.

$$P(X = 7) = \frac{1}{32}.$$

- Si la carte tirée n'est ni un cur, ni un roi, $X = -1$.

$$P(X = -1) = \frac{21}{32}.$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

$$2) P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

La probabilité de gagner plus de 5 € est égale à $\frac{1}{8}$.

II. Espérance, variance et écart-type

1) Espérance

Définition

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

Méthode - Déterminer une loi de probabilité

Dans le jeu de la « Méthode » du paragraphe précédent, calculer l'espérance de la loi de probabilité de X et interpréter le résultat.

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32}$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner environ 0,50 € par partie.

 **Remarque** L'espérance est donc le gain moyen par partie que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois. Dans tous les jeux au casino l'espérance est négative. Sur un grand nombre de parties, c'est le casino qui est gagnant.

2) Variance et écart-type

Définitions

- La variance de X est le nombre réel, noté $Var(X)$, défini par :

$$Var(x) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$

- L'écart-type de X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par, $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Méthode - Déterminer une variance et un écart-type

Dans le jeu de la « Méthode » précédente, calculer la variance et l'écart-type.

On rappelle que $E(X) = \frac{15}{32}$

$$Var(X) = \frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(7 - \frac{15}{32}\right)^2 = \frac{5311}{1024} \approx 5,19$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{5311}{1024}} \approx 2,28$$

L'écart-type est d'environ 2,28. Plus l'écart-type est petit, plus les résultats des parties seront proches de l'espérance. Un grand écart-type signifie donc que vous pouvez avoir des résultats très différents que ce qui est prévu (en positif comme en négatif).