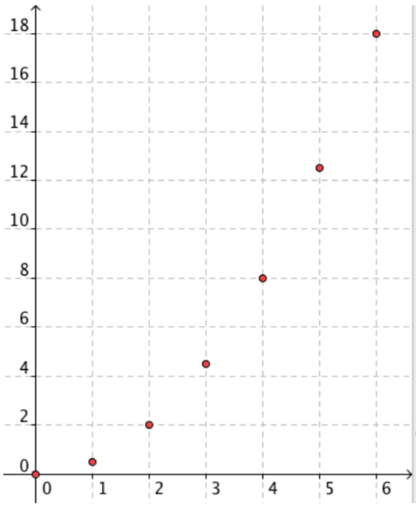
Chapitre 13

Variations de suites

I. Sens de variation d'une suite numérique

Exemple : On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n) :



	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	0.5
4	2	2
5	3	4.5
6	4	8
7	5	12.5
8	6	18
9	7	24.5
10	8	32
11	9	40.5
12	10	50
13	11	60.5
14	12	72
15		

On peut conjecturer que cette suite est croissante. On constate par exemple que $u_1 < u_2$ ou encore $u_4 < u_5$. De manière générale, on peut écrire : $u_n < u_{n+1}$

Définitions

Soit une suite numérique (u_n).

- La **suite** (u_n) **est croissante** signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La **suite** (u_n) **est décroissante** signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Méthode - Étudier les variations d'une suite

Énoncé :

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + 2$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (v_n) définie par : $v_n = 4n + 4$.
Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

Réponse :

1) $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$
On en déduit que (u_n) est croissante.

2) On commence par calculer la différence $v_{n+1} - v_n$:
On a : $v_n = 4n + 4$ donc $v_{n+1} = 4(n+1) + 4 = 4n + 4 + 4 = 4n + 8$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 4n + 8 - (4n + 4) \\ &= 4n + 8 - 4n - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

On étudie ensuite le signe de $v_{n+1} - v_n$:
Pour tout n entier $v_{n+1} - v_n = 4 > 0$.
On en déduit que la suite (v_n) est croissante.

II. variation d'une suite arithmétique

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite U_n est décroissante.

Démonstration

$U_{n+1} - U_n = U_n + r - U_n = r$.

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$ et la suite U_n est croissante.
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$ et la suite U_n est décroissante.

Exemple : La suite arithmétique U_n définie par $U_n = 8 - 3n$ est décroissante car de raison négative et égale à -3.

III. variation d'une suite géométrique

Propriété

U_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul U_0.
Pour $U_0 > 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite U_n est décroissante.

Pour $U_0 < 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite U_n est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite U_n est croissante.

Démonstration - cas où $U_0 > 0$

$U_{n+1} - U_n = U_0 \times q^{n+1} - U_0 \times q^n = U_0 \times q^n \times (q - 1)$.

- Si $q > 1$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$ et la suite U_n est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$ et la suite U_n est décroissante.