Chapitre 14

Application du produit scalaire

I. Produit scalaire et norme

1) Propriétés

Propriété

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Démonstration - Démonstration de la première formule

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})^2 \\
&= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

Démonstration

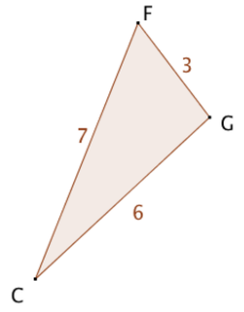
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)
\end{aligned}$$

Exemple : Si AB $= 6$, AC $= 5$ et CB $= 4$ alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 5^2 - 4^2\right) = \frac{1}{2}(36 + 25 - 16) = \frac{45}{2}$$

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

Enoncé :
On considère la figure ci-dessous, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$



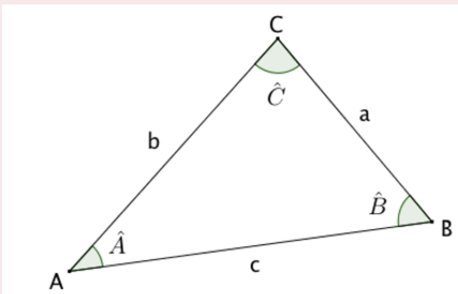
Réponse :
$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - GF^2\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right)$
$= 38$

2) Théorème d'Al Kashi

Théorème

Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

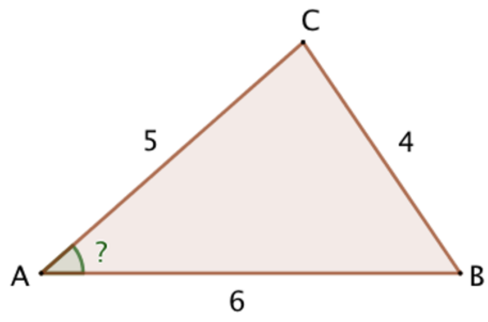


Démonstration

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\hat{A} = bc\cos\hat{A}$
et
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$
Donc : $\frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = bc\cos\hat{A}$
Soit : $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\hat{A}$
Soit encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Méthode - Calculer un angle à l'aide des normes

Enoncé :
On considère la figure ci-dessous, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



Réponse :
D'après le théorème d'Al Kashi, on a :
$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$
$16 = 36 + 25 - 60 \cos \widehat{BAC}$
$60 \cos \widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$
$60 \cos \widehat{BAC} = 45$
$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{45}{60}$
$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$

II. Vecteur Normal

1) définition et propriétés

Définition

Un **vecteur normal** à une droite d quelconque du plan est un vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de d.

Propriété

Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'une est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Démonstration

On suppose que d et d' sont perpendiculaires. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}$ de d', alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. $\vec{v}$ étant normal à d et $\vec{u}$ à d', la propriété est vérifiée.
Réciproquement, si $\vec{u}$, vecteur normal à d, est orthogonal à $\vec{v}$, vecteur normal à d', alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}$ de d'. Ayant des vecteurs directeurs orthogonaux, d et d' sont

perpendiculaires.

Méthode

Enoncé :

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une condition sur les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ non nul pour qu'il soit normal à d.

2) Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal à d ?

Réponse :

1) Si $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d, alors il est orthogonal à $\vec{u}$.

Donc $\vec{u}\cdot\vec{n} = 3x + 5y = 0$ soit $y = -\dfrac{3}{5}x$.

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}x\\-\dfrac{3}{5}x\end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

2) On calcule le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times(-10) + 5\times 6 = -30 + 30 = 0$
le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d, donc $\vec{v}$ est un vecteur normal à d.

2) Équations cartésiennes et vecteur normal

Rappel

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$. Un **vecteur directeur** de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Propriété

Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.

La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour **vecteur normal** le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Réciproquement, toute droite ayant pour **vecteur normal** le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple : La droite d'équation cartésienne $3x - 4y + 5 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
On a bien $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$

Méthode

Enoncé :
Dans un repère orthonormé, déterminer, de deux façons différentes, une équation cartésienne de la droite d passant par le point $\mathrm{A}(5;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Réponse :

1) 1. On lit sur le vecteur normal que $a=2$ et $b=-3$. Donc une équation de d est de la forme $2x-3y+c=0$. $\mathrm{A}(5;-1)\in d$ donc $2\times5-3\times(-1)+c=0$ et donc $c=-13$.
Ainsi, une équation de la droite d est $2x-3y-13=0$.

2) Soit $\mathrm{M}(x;y)$ appartenant à d. Alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est un vecteur directeur de d et est orthogonal au vecteur $\vec{n}$.
$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x-5\\y+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=0 \iff 2(x-5)-3(y+1)=0 \iff 2x-3y-13=0$
Donc une équation de la droite d est $2x-3y-13=0$