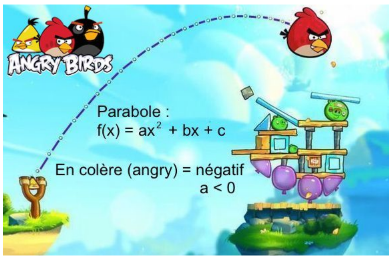
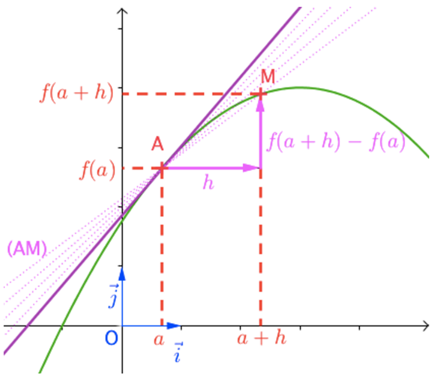


1ÈRE SPÉCIALITÉ MATHS

Cours de Mathématiques



Cours de M. Buisson

Lycée Notre-Dame de Bel Air - Tarare

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions polynôme de dégré 2

I. Forme développée

Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage « *trinôme* ».

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra créer trois curseurs a, b, c puis dans la ligne de saisie taper $f(x) = ax^2 + bx + c$. On obtient ainsi le tracé de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ on s'intéressera aux cas où $a \neq 0$. (si $a = 0 f$ est une fonction affine)

Définition

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée **parabole**.

Exemple :

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ou $g(x) = (x-4)(5-2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $h(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1.
- $i(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

Variations de la fonction trinôme

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra , reprendre la manipulation précédente et prendre un $a > 0$. Faire alors varier b et c. Que constatez-vous quant variations de f ? Et si on prend un autre a strictement positif ? Conjecturer les variations de f en complétant le tableau de variation suivant :

1er cas $a > 0$:

x	
$f(x)$	

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra, reprendre la manipulation précédente et prendre un $a < 0$. Faire alors varier b et c. Que constatez-vous quant variations de f ? Et si on prend un autre a strictement négatif ? Conjecturer les variations de f en complétant le tableau de variation suivant :

2ème cas $a < 0$:

x	
$f(x)$	

Nous retiendrons donc :

Propriété

Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	y_S	$\nearrow$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	y_S	$\searrow$

Définition

le point de coordonnés $(x_S; y_S)$ avec y_S l'extremum de f sur P est appelé **sommet de la parabole**.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Propriété

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :
$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.
Cette dernière écriture s'appelle **la forme canonique de f**.

Démonstration

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a(x-\alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra créer trois curseurs a, α, β puis dans la ligne de saisie taper $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. On obtient ainsi le tracé de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Compléter alors le cas général ci-dessous.

Propriété

Le sommet S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$

Propriété

La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x = \alpha$.

Avec ces nouvelles données, on peut maintenant compléter notre tableau de variations :

Propriété

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

III. passage de la forme développée à la forme canonique

Pour passer de la forme développée à la forme canonique, il existe 2 méthodes

1) passer à la forme canonique à l'aide d'identité remarquable

Méthode - Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Enoncé :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.
Réponse :
f doit être de la forme : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ou a, α et β sont des nombres réels.
$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$
On commence par mettre le a en facteur pour les 2 termes avec des x
$f(x) = 2[x^2 - 10x] + 10$
On fait ensuite apparaitre le 3ème terme d'une identité remarquable ($a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$)
$f(x) = 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10$
On factorise l'identité remarquable et on regroupe les termes qui restent ensemble.
$f(x) = 2[(x - 5)^2 - 25] + 10$
$f(x) = 2(x - 5)^2 - 50 + 10$
$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$
$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$ est la forme canonique de f.

2) Cas général

Propriété

Pour passer de la forme développée à la forme canonique (ou inversement), on peut utiliser les formules : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 60x - 20$. On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

On commence par calculer α :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{60}{2 \times 3} = -10.$
Pour calculer β, on a 2 possibilités : soit on utilise la formule ci-dessus, soit on dit que $\beta = f(\alpha)$ et on remplace x par α dans l'expression $f(x)$

Chapitre 2

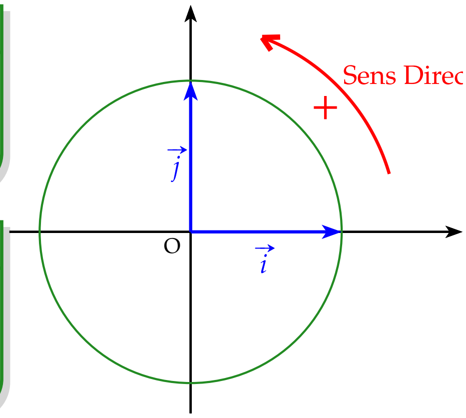
Trigonométrie

I. Cercle trigonométrique et radian

1) Le cercle trigonométrique

Définition

Sur un cercle, on appelle **sens direct, sens positif ou sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

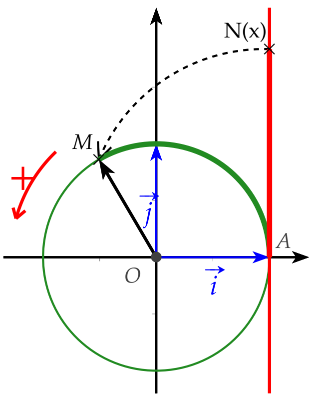


Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$), on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A; \vec{j})$ soit un repère de la droite.
Si l'on « *enroule* » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.
La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

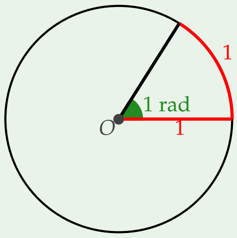


3) Le radian

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360°ou 2π radians.

Définition

On appelle **radian**, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degrée(°)	0	30	45	60	90	180	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode - Passer des degrés aux radians et réciproquement

Enoncé :

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

Réponse :

2π	α	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	β

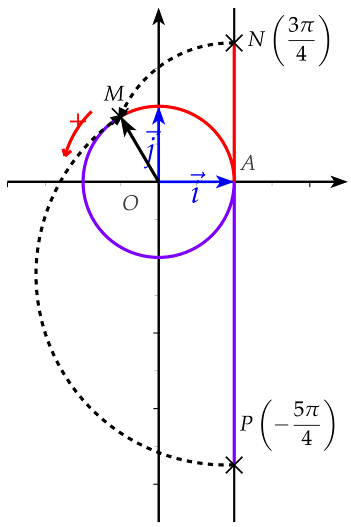
1) $\alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}$

2) $\beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67,5°$

II. Mesure d'un angle orienté

1) Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.



Exemples :

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.
  En effet : $\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$
- On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant 1, 2, 3, ... tours successifs.

Méthode - Placer un point sur le cercle trigonométrique

Enoncé :

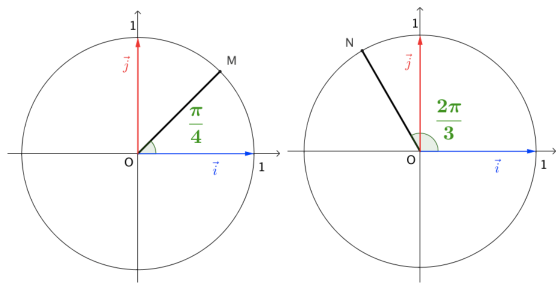
1) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.

2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.

Réponse :

1) $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$.
Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.

2) $\frac{8\pi}{6} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$.
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.



2) Mesure principale d'un angle orienté

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ alors tout angle de la forme $\theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$.
On dit que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ est égal à θ modulo 2π.

Définition

La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exemple : Une mesure d'un angle orienté est $\dfrac{7\pi}{4}$.

D'autres mesures sont : $\dfrac{7\pi}{4}-2\pi\,;\dfrac{7\pi}{4}-4\pi\,;\dfrac{7\pi}{4}-6\pi\,;$ ... soit : $-\dfrac{\pi}{4}\,;-\dfrac{9\pi}{4}\,;-\dfrac{17\pi}{4}\,;$ ...

$-\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre π exclu et π.

Méthode - Donner la mesure principale d'un angle

Enoncé :

Donner la mesure principale de l'angle $\dfrac{27\pi}{4}$.

Réponse :

On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :

$\dfrac{27\pi}{4}=\dfrac{28\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=7\pi-\dfrac{\pi}{4}$

Dans 7π, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :

$\dfrac{27\pi}{4}=6\pi+\pi-\dfrac{\pi}{4}=6\pi+\dfrac{4\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=6\pi+\dfrac{3\pi}{4}$

6π correspond à 3 tours entiers.

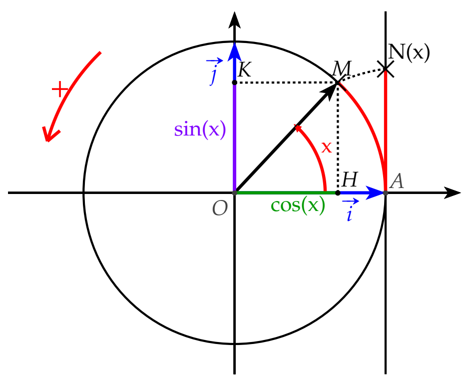
$\dfrac{3\pi}{4}$ est bien compris entre π exclu et π.

La mesure principale de $\dfrac{27\pi}{4}$ est $\dfrac{3\pi}{4}$.

III. Cosinus et sinus d'un angle

1) Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.
Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définitions

- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos x$.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin x$.

2) Propriétés

Propriétés

- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
- $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

Remarque $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$

3) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

4) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés

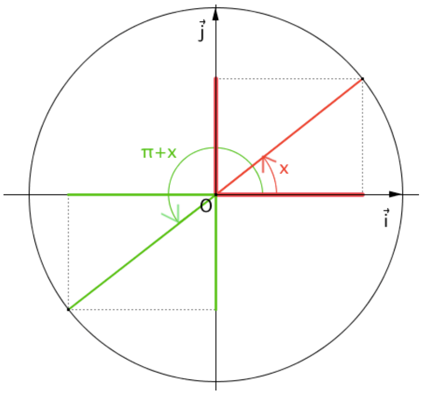
Pour tout nombre réel x, on a :

1) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
2) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
3) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.
4) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

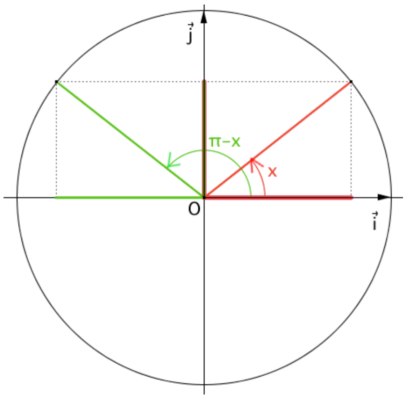
Démonstration

Par symétries, on démontre les résultats :

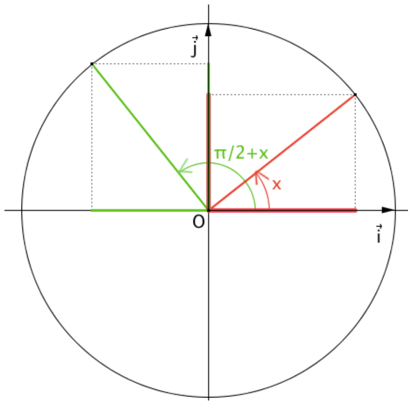
1)



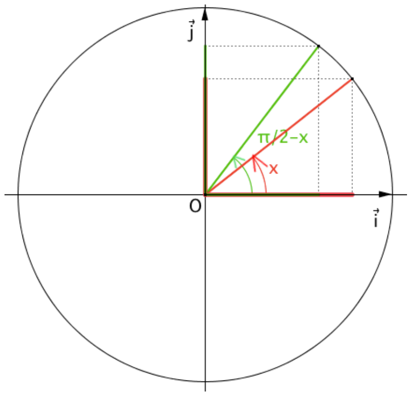
2)



3)



4)



Chapitre 3

Équations du second degré

I. Résolution d'une équation du second degré

1) Résoudre une équation à l'aide du discriminant

Définition

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple : L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Remarque Résoudre l'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ ou trouver les racines du trinôme $3x^2 - 6x - 2$ sont deux énoncés identiques.

Définition

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Méthode - Résoudre une équation du second degré

Enoncé : Résoudre les équations suivantes :

1) $2x^2 - x - 6 = 0$

2) $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0.$

3) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Réponse :

1) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:
$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

2) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:
$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.
Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une solution unique :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

3) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:
$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

2) Résoudre une équation à l'aide de la somme et du produit des racines

Propriété

La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Démonstration

- $S = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $P = x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta}) \times (-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Méthode - utiliser somme et produit pour trouver les 2 racines

Enoncé :
Trouver les 2 racines du polynôme suivant : $2x^2 + 3x - 5$
Réponse :
On a une solution évidente ($x_1 = 1$). Or la somme des 2 racines vaut $S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$. Donc :
$x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \iff 1 + x_2 = -\frac{3}{2} \iff x_2 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

Remarque Quant on a des équations du second degré avec $a = 1$ (donc du type $x^2 + \ldots = 0$) on retrouve directement la somme et le produit car l'équation s'écrit $x^2 - Sx + P = 0$.

II. Factorisation d'un trinôme

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 racine unique du trinôme.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les 2 racines du trinôme..

Remarque Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode - Factoriser un trinôme

Enoncé : Factoriser les trinômes suivants

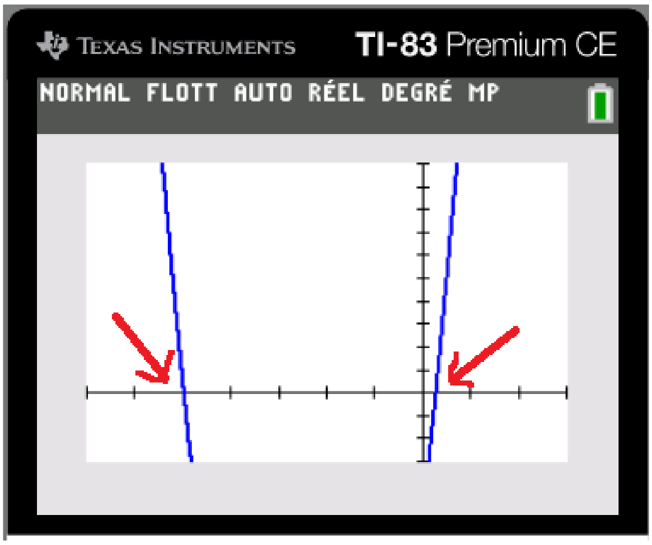
1) $4x^2 + 19x - 5$
2) $9x^2 - 6x + 1$.

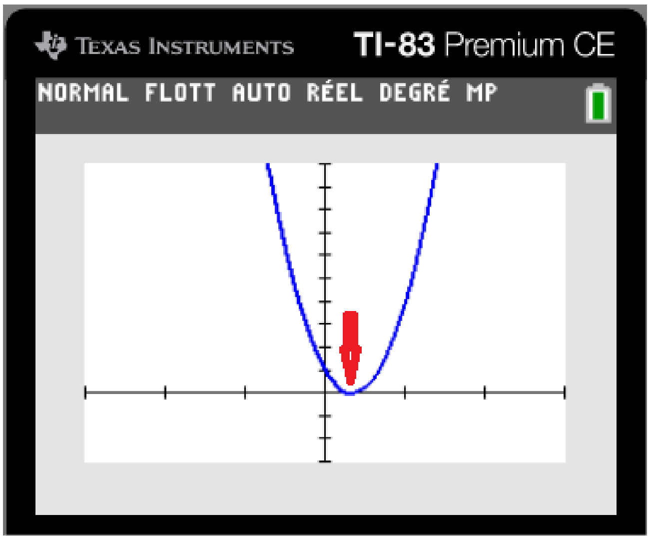
Réponse :

1) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:
Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$
Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4} = \mathbf{-5}$ et $x_2 = \dfrac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$
On a donc :
$4x^2 + 19x - 5 = 4\,(x - (-5))\left(x - \dfrac{1}{4}\right) = (x + 5)(4x - 1)$

2) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:
Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 4 \times 9 \times 1 = 0$
La racine (double) est : $x_0 = -\dfrac{-6}{2 \times 9} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$
On a donc :
$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

Remarque On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice. En traçant la courbe représentative de la fonction, on peut vérifier les racines à l'aide des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses. Ainsi en traçant les courbes précédentes, nous obtenons les courbes suivantes :





III. signe d'un trinôme

Intro

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

☞ si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut.

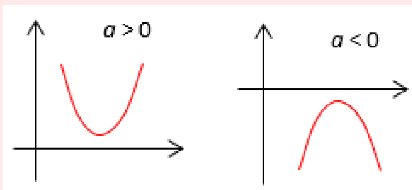
☞ si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

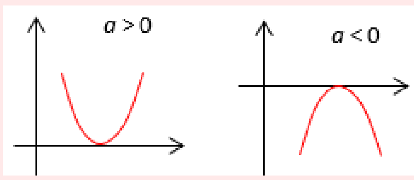
- si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	signe de a



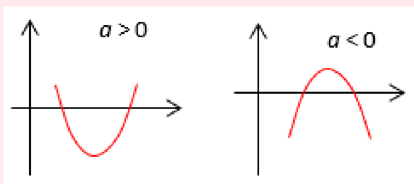
- si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a



- si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a



Méthode - Résoudre une inéquation du second degré

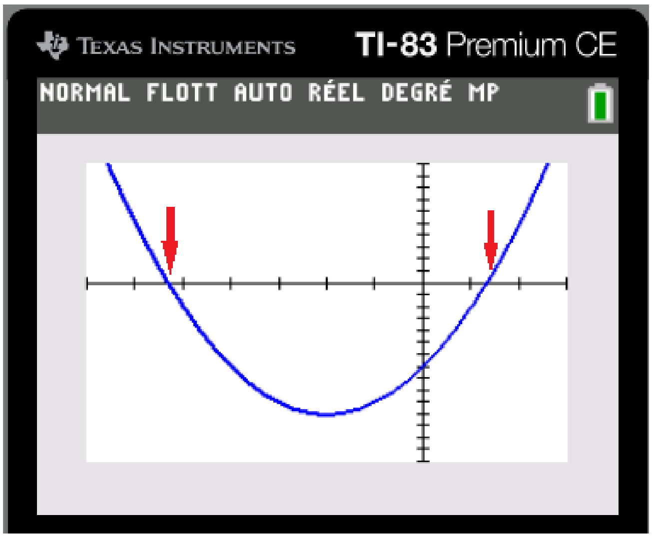
Enoncé : Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

Réponse :
On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.
$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.
Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 42 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :
$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $\left]-2 - \sqrt{11} ; -2 + \sqrt{11}\right[$.

Remarque Comme précédement, on peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.



Chapitre 4

Vecteurs - partie 1

I. Définitions et propriété

1) Norme d'un vecteur

Définition

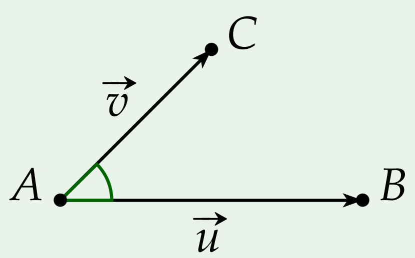
Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

2) Produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$



Remarques

- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos(\widehat{BAC})$
- **Attention** : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

Méthode - calculer un produit scalaire

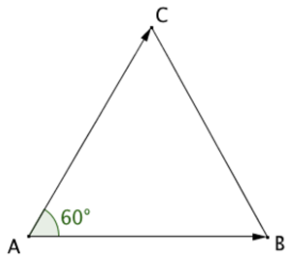
Enoncé : Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sachant que $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

Réponse :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 4\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$$

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Enoncé :
Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. Calculer, en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Réponse :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$$
$$= a \times a \times \cos 60°$$
$$= a^2 \times 0,5$$
$$= \frac{a^2}{2}$$

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Démonstration

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v};\vec{u}))$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v};\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$

4) opérations sur les produits scalaires

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$, avec k un nombre réel.

5) Identités remarquables

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration - 2ème formule :

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})^2 &= (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Démonstration

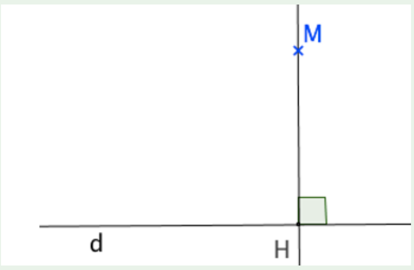
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u};\vec{v}) = 0\\ &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}\end{aligned}$$

2) Projection orthogonale

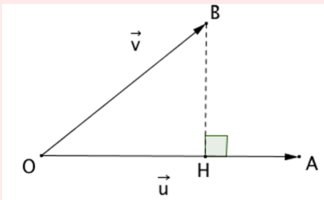
Définition

Soit une droite d et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.



Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA). On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



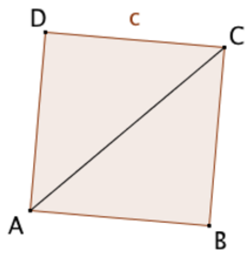
Démonstration

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$
$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode - Calculer un produit scalaire par projection

Enoncé :
Soit un carré ABCD de côté c. Calculer, en fonction de c, les produits scalaires :



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ **3)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

Réponse :

1) Par projection, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$

III. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\,(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}\\ &= xx'\,\|\vec{\imath}\|^2+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\,\|\vec{\jmath}\|^2\\ &= xx'+yy'\end{aligned}$$

car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé, et $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

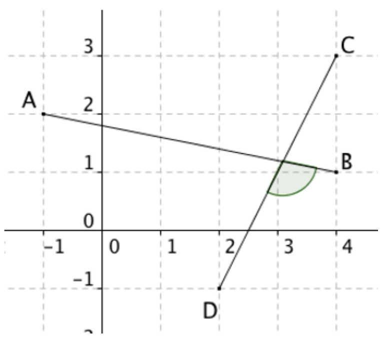
Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Enoncé :
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Réponse :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times(-3)+(-4)\times 7 = -15-28 = -43$

Méthode - Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Enoncé :
Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



Réponse :
On a :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$
$= \sqrt{(4-(-1))^2+(2-1)^2}\times\sqrt{(4-2)^2+(3-(-1))^2}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

$= \sqrt{520} \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$
$= 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5;-1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2;-4)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -6$
On a ainsi : $2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = -6$
Et donc : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$
Et : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \approx 105,3°$

Chapitre 5

Fonction sinus et cosinus

I. Résoudre une équation trigonométrique

Méthode - Résoudre une équation trigonométrique

Enoncé :

Résoudre sur $[3\pi;5\pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Réponse :**

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

On en déduit les solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

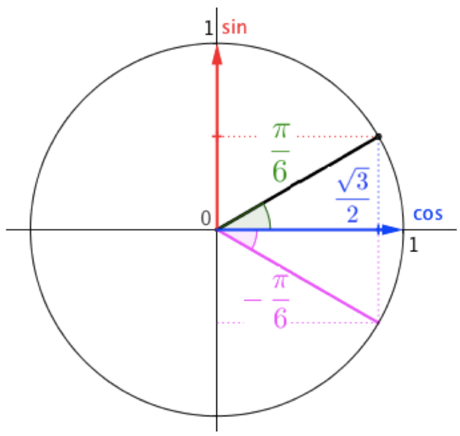
On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $[3\pi;5\pi]$ (ou $\left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right]$)

$$k=1 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \end{cases}$$

$$k=2 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{25\pi}{6} \in \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{23\pi}{6} \in \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \end{cases}$$

$$k=3 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 6\pi = \dfrac{37\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 6\pi = \dfrac{35\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \end{cases}$$

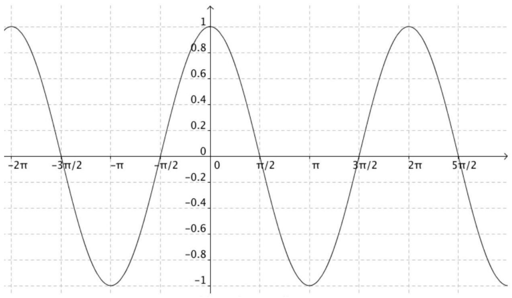
On peut maintenant conclure : $S = \left\{\dfrac{23\pi}{6};\dfrac{25\pi}{6}\right\}$



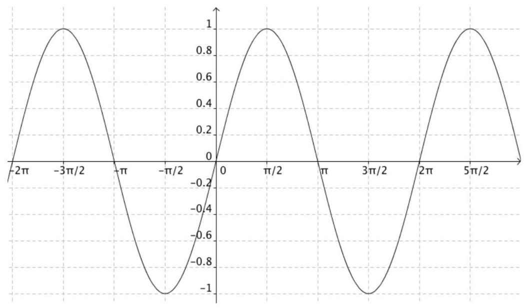
II. Définitions et représentations graphiques

Définitions

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La fonction sinus, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



Fonction cosinus



Fonction sinus

III. Périodicité

Propriétés

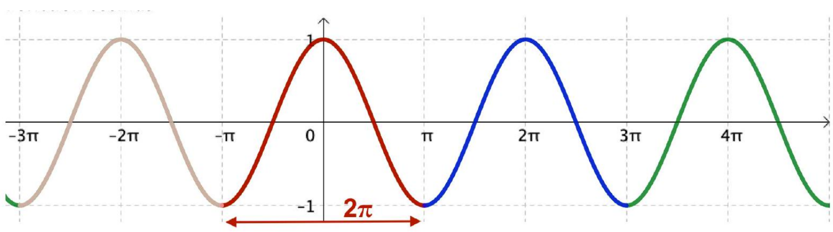
- $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
- $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

Démonstration

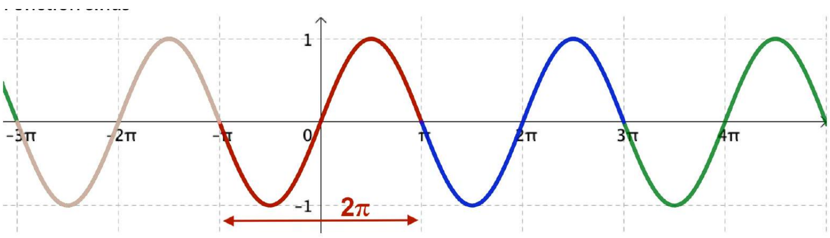
Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π. Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.

1) Fonction cosinus



2) Fonction sinus



IV. Parité

Définitions

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une fonction impaire.

Remarques

- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.

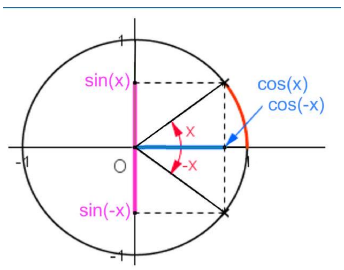
Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés

- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration

Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



Remarques

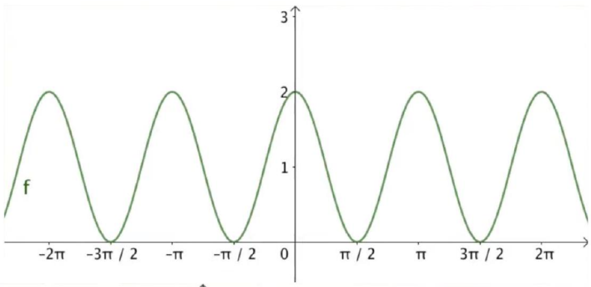
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

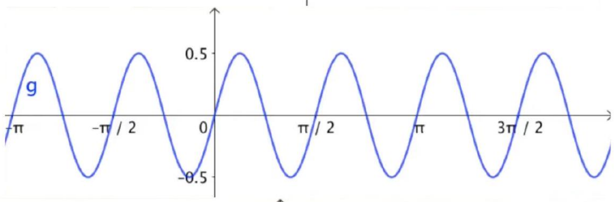
V. Méthodes

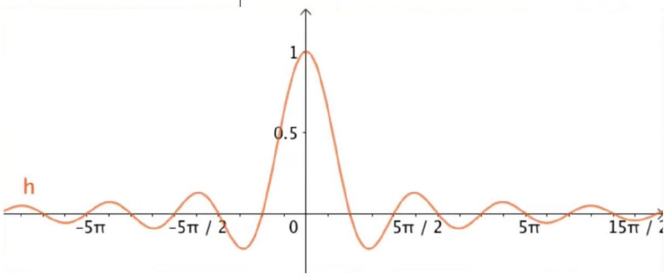
Méthode - Reconnaître graphiquement la parité et la périodicité d'une fonction

Enoncé :

Déterminer graphiquement la parité et la périodicité des fonctions f, g et h représentées ci-dessous :



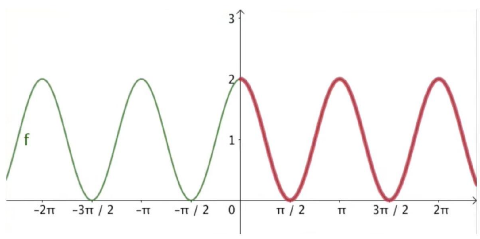




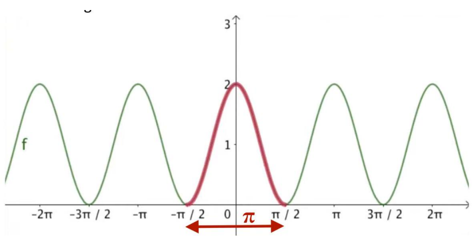
Corrigé :

- FONCTION f :

La fonction f est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

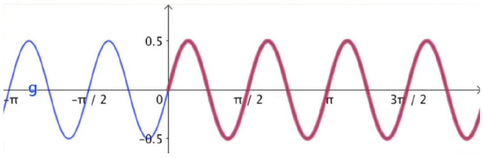


La fonction f est périodique de période π car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π.

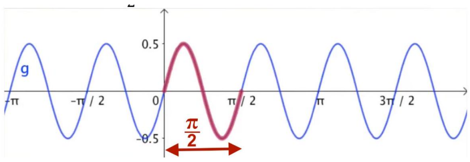


- FONCTION g :

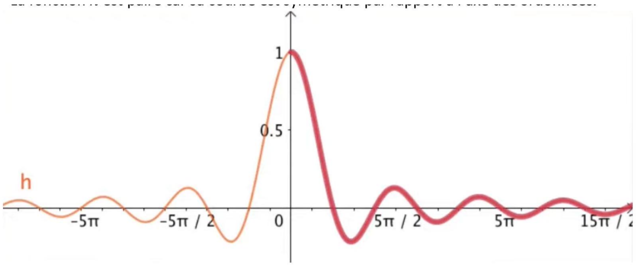
La fonction g est impaire car sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.



La fonction g est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$.



- FONCTION h :
La fonction h est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



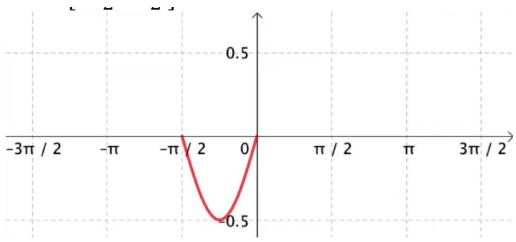
La fonction h n'est pas périodique, on ne retrouve pas le même morceau de courbe sur différents intervalles.

Méthode - Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Enoncé :
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.
Corrigé :
On a :
$f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin(x) + \sin(2x) = -(\sin(x) - \sin(2x)) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.
Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

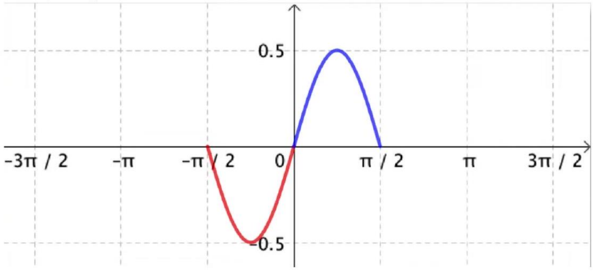
Méthode - Compléter un graphique par parité et périodicité

Enoncé :
Soit f une fonction impaire et périodique de période π. Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

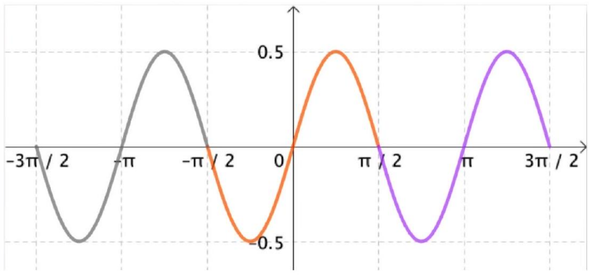


Corrigé :

1ère étape : La fonction est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
On complète donc par symétrie centrale.



2e étape : La fonction est périodique de période π. On retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π.
Le morceau déjà tracé a pour longueur π, on le reproduit à gauche et à droite.



Chapitre 6

Fonctions de référence

I. Fonction carré

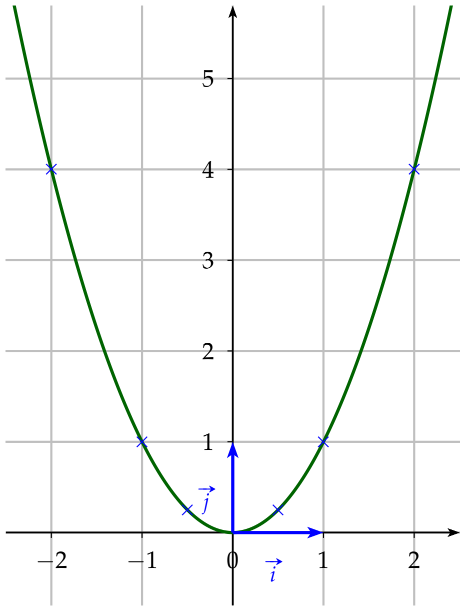
1) définition

Définition

La fonction carré f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2) Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques

- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carré n'est donc pas une fonction linéaire.
- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.
- Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction carré est donc une fonction paire.

3) Variations de la fonction carré

Propriété

La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

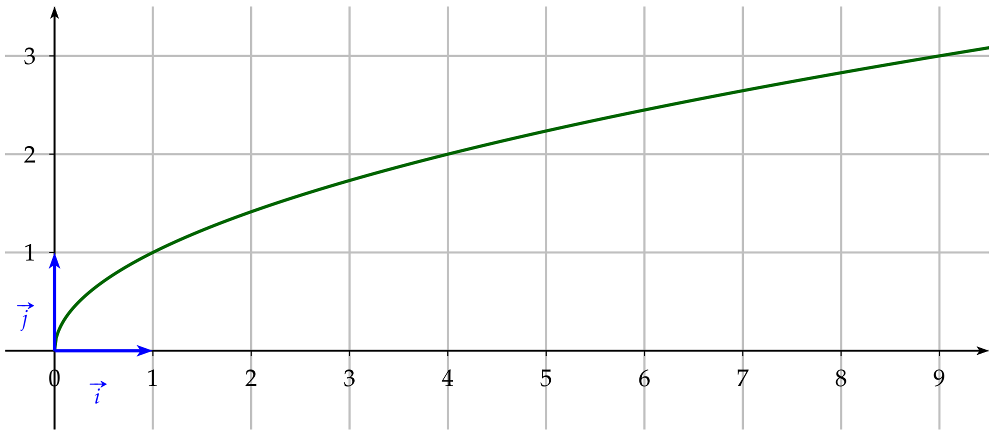
II. Fonction racine carrée

1) définition

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

2) Représentation graphique



Remarque La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.

3) Variations de la fonction racine carrée

Propriété

La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Démonstration

On pose : $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Or $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$. Donc $f(b) - f(a) > 0$ Donc $f(a) < f(b)$.
Ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

III. Fonction inverse

1) définition

Définition

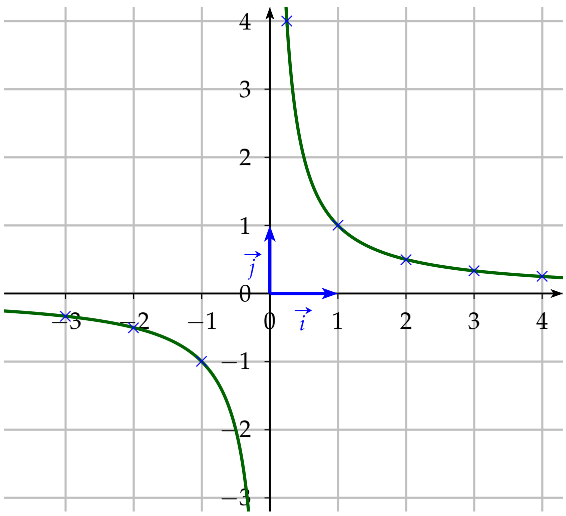
La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarques

- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire $]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2) Représentation graphique

x	-2	-1	$0,25$	1	2	3
$f(x)$	$-0,5$	-1	4	1	$0,5$	$\dfrac{1}{3}$



Remarques

- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ de la fonction inverse est une hyperbole de centre O.
- La courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine. La fonction inverse est donc une fonction impaire.

3) Variations de la fonction inverse

Propriété

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Remarque La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur $]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$ qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

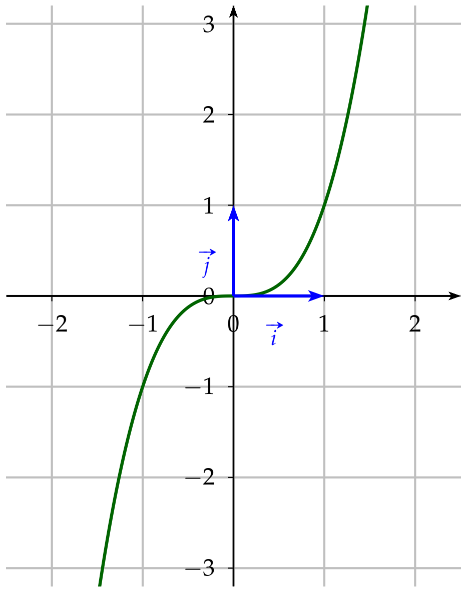
IV. Fonction cube

1) définition

Définition

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

2) Représentation graphique



Remarque Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^3$ de la fonction cube est symétrique par rapport au centre du repère. La fonction cube est donc une **fonction impaire**.

3) Variations de la fonction cube

Propriété

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cette propriété est admise.

Chapitre 7

Dérivation

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0 . On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0 On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$

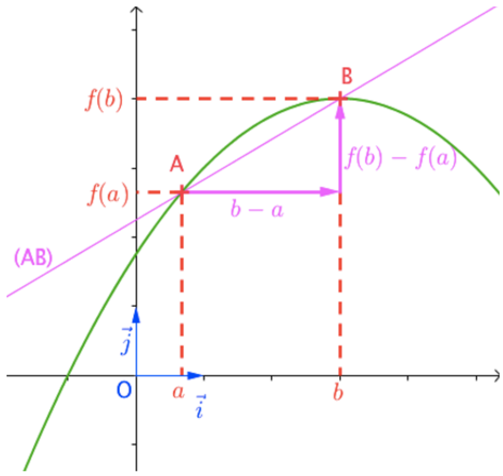
Définition

On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0 .
On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L.

II. Nombre dérivé

1) Rappel : Pente d'une droite

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a<b$. Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b. La pente (ou le coefficient directeur) de la droite (AB) est égal à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

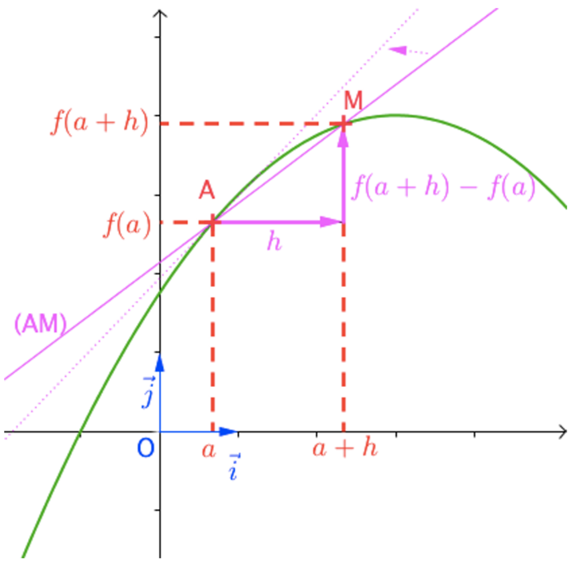


2) Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit un réel a appartenant à I.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$ La pente de la droite (AM) est égale à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



Définition

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

L est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

3) Démontrer qu'une fonction est dérivable

Méthode

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ Démontrer que f est dérivable en $x = 2$. On commence par calculer $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times2+3}{h}\\ &= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}\\ &= \frac{6h+h^2}{h}\\ &= \frac{h(6+h)}{h}\\ &= 6+h\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to0} 6+h = 6.$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.

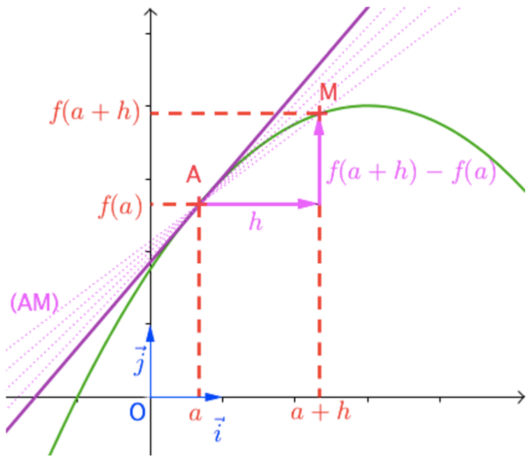
III. Tangente à une courbe

1) Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition

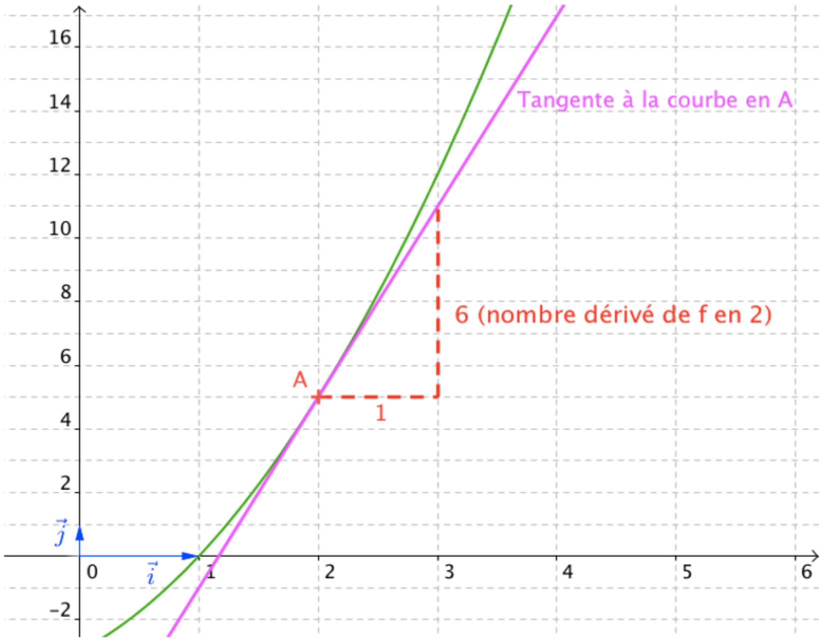
La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.



2) Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

Méthode

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+2x-3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.
Déterminer la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 . Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de pente (coefficient directeur) 6.



3) Relation entre tangente et nombre dérivée

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme : $y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :
La tangente passe par le point $A(a; f(a))$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

4) Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Méthode

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 .
On a vu plus haut que la pente de la tangente est égal à 6 . Donc son équation est de la forme

: $y = 6(x-2) + f(2)$, soit :
$y = 6(x-2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$
$y = 6x - 7$
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.

IV. Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple (démonstration au programme)

Démonstration

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Démontrons que pour tout x réel, on a :
$f'(x) = 2x$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

$$\text{Pour } h \neq 0 : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

$$\text{Or } : \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$. On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$. Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

2) Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geqslant 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geqslant 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\,0; +\infty[$

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$.

3) Démonstration au programme pour la fonction inverse

Démonstration

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Pour $h \neq 0$ et $a \neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\text{Or : } \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

4) Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

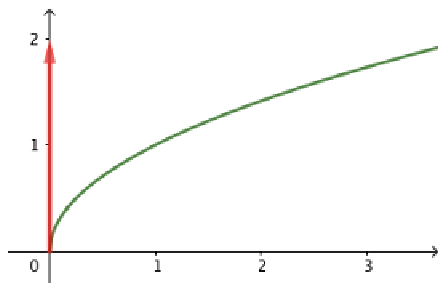
Démonstration

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{(x)}$.
On calcule le taux de variation de f en 0 :

$$\text{Pour } h > 0 : \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \frac{h}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\text{Or : } \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

En effet, lorsque h tend vers 0, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc f n'est pas dérivable en 0. Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.



V. Opérations sur les fonctions dérivées

1) Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2$.
Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{a+h+(a+h)^2-a-a^2}{h}\\ &= \frac{a+h+a^2+2ah+h^2-a-a^2}{h}\\ &= \frac{h+2ah+h^2}{h} = 1+2a+h\\ &= 1+2a+h\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 1+2a+h = 1+2a$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1+2x$.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$. On a ainsi : $f(x) = u(x) + v(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
On constate sur cet exemple que : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Soit encore : $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

a) Formules d'opération sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

b) démonstration : Fonction dérivée d'un produit

La démonstration sera faite en classe avec l'exercice 98 p 128.

2) Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Méthode

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^3$ **2)** $f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 5x}$ **4)** $f_4(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$

1) $f_1(x) = 5u(x)$ avec $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$
Donc : $f_1'(x) = 5u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

2) $f_2(x) = u(x) + v(x)$ avec :
$u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 6x$
$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
Donc : $f_2'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$
Donc : $f_3'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2} = -\dfrac{4x + 5}{(2x^2 + 5x)^2}$

4) $f_4(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$
$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$
Donc : $f_4'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$
$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$
$= 45x^2 + 34x - 4$

3) Composée de dérivées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(ax + b)$	f dérivable sur I	$af'(ax + b)$

Méthode

$f(x) = \sqrt{5x - 4}$
Alors $f'(x) = 5\dfrac{1}{2\sqrt{5x - 4}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - 4}}$
En effet : $(5x - 4)' = 5$ et $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Chapitre 8

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par :
$P_A(B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$.

Exemples :
Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit « *Gagné* » ou soit « *Perdu* ».
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement « *On tire une boule rouge* ».
Soit G l'événement « *On tire une boule marquée Gagné* ».
Donc $R \cap G$ est l'événement « *On tire une boule rouge marquée Gagné* ».

Alors : $P(R) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et $P(R \cap G) = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :
$P_R(G) = \dfrac{Card(R \cap G)}{Card(R)} = \dfrac{O,3}{0,4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

Remarque La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilité simples. On a en particulier :

Propriété

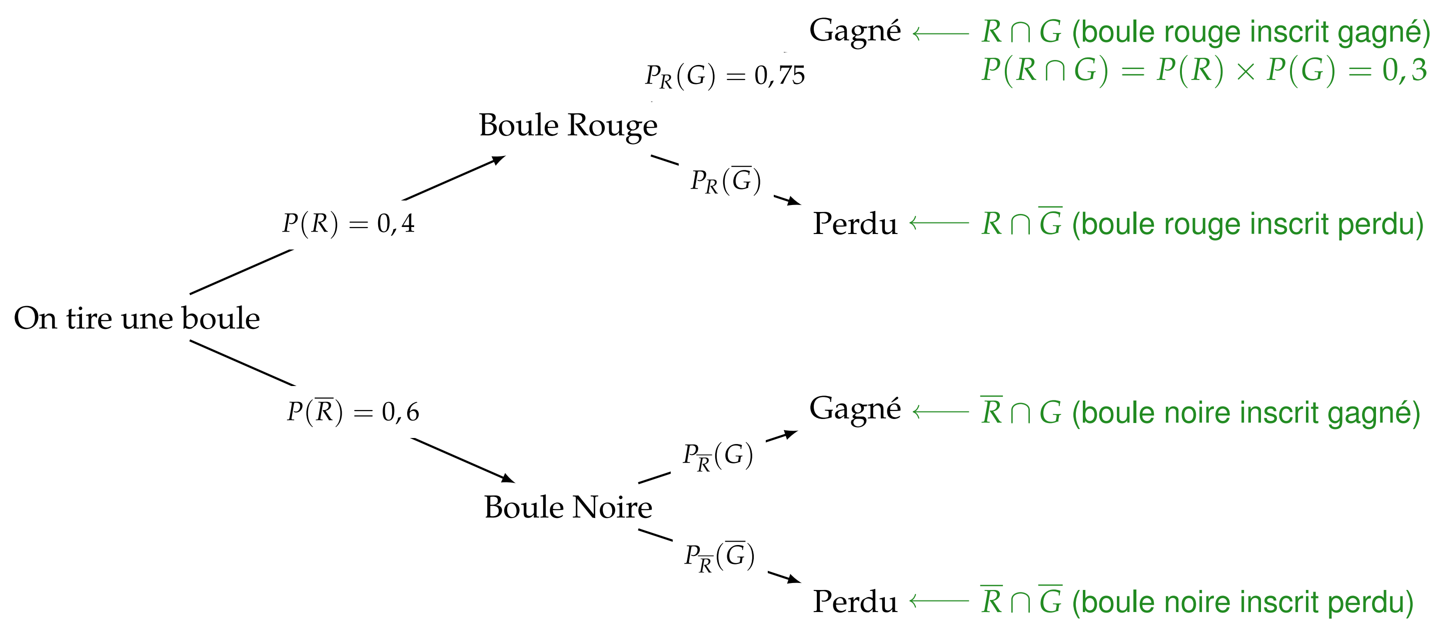
Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

II. Arbre pondéré

1) Exemple

Exemple : On reprend l'exemple étudié au paragraphe I. L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) Règles

Règle

La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.

Exemples :

- A partir du noeud « *On tire une boule* », on a : $P(R) + P(\overline{R}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du noeud « *Boule rouge* », on a : $P_R(\overline{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

Règle

La probabilité d'une « *feuille* » (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

Exemple : On considère la feuille $R \cap G$. On a :
$P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

Règle

Formule des probabilités totales
La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

Exemple : L'événement « *On tire une boule marquée Gagné* » est associé aux feuilles $R \cap G$ et $\overline{R} \cap G$. On a :

$P(R \cap G) = 0,3$ et $P(\overline{R} \cap G) = \dfrac{9}{50} = 0,18$
(Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)
Donc $P(G) = P(R \cap G) + P(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48$.

III. Probabilités et indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque On a également : A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement « *On tire un roi* ».
Soit T l'événement « *On tire un trèfle* ».
Alors $R \cap T$ est l'événement « *On tire le roi de trèfle* ».

On a :
$P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(T) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \dfrac{1}{32}$
Donc $P(R) \times P(T) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = P(R \cap T)$
Les événements R et T sont donc indépendants. Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :
On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Ainsi : $P(R) = \dfrac{4}{34} = \dfrac{2}{17}$, $P(T) = \dfrac{8}{34} = \dfrac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \dfrac{1}{34}$
Donc $P(R) \times P(T) = \dfrac{2}{17} \times \dfrac{4}{17} = \dfrac{8}{289} \neq P(R \cap T)$
Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Propriété

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exemple : Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7.
Soit A l'événement « *On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6.* »
Soit B l'événement « *On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7.* »
On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Alors les événements $\overline{A}$ et B sont également indépendants et on a :
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0,58 \times 0,63 = 0,3654$

On peut interpréter ce résultat :
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à $36,54\%$.

2) Succession de deux épreuves indépendantes

Exemples :

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
  On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition

Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :

- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
Si on répète l'expérience deux fois de suite :

- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Remarque

- Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

Exemple : On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.
La probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A; B; A; C)$ est égale à :
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$

Chapitre 9

Suites numériques

Point histoire

Dès l'Antiquité, Archimède de Syracuse (-287 ; -212), met en oeuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π. Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, Archimède donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.
Vers la fin du XVII^{e} siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, ...
Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaitra qu'au début du XIX^{e} siècle avec le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789 ;1857).

I. généralités sur les suites numériques

1) Définition d'une suite numérique

Exemple - Exemple d'introduction : On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : $1, 3, 5, 7, \ldots$
On note (u_n) l'ensemble des éléments de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \ldots$
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Définition

- Une **suite numérique** (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
- u_n est appelé **le terme de rang n** de cette suite (ou d'indice n).

2) Suite définie par une formule explicite

Exemples :

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs. Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $u_0 = 2 \times 0 = 0$

$u_1 = 2 \times 1 = 2$
$u_2 = 2 \times 2 = 4$
$u_3 = 2 \times 3 = 6$

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$ Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$
  $v_l = 3 \times 1^2 - 1 = 2$
  $v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$
  $v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

Définition

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

3) Suite définie par une relation de récurrence

Exemples :

- On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent. Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $u_0 = 5$
  $u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$
  $u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$
  De façon générale, on peut noter : $u_{n+1} = 3u_n$
- On définit la suite (v_n) par : $v_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}, v_{n+1} = 4v_n - 6$ Les premiers termes de cette suite sont donc :
  $v_0 = 3$
  $v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$
  $v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$
  $v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66$
  Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

  Cependant il est possible d'écrire un algorithme avec Python :

```
def suite(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=4*u-6
    return(u)
```

```
>>> suite(13)
67108866
```

  Ou sur une calculatrice :

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u–6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
         67108866
         Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u–6→u↵
Next↵
u◢
```

```
?
13
   67108866
   -Disp-
```

Définition

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir de son terme précédent.Il faut connaître au moins un terme de la suite pour calculer les autres termes.

Remarque Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

4) Représentation graphique d'une suite

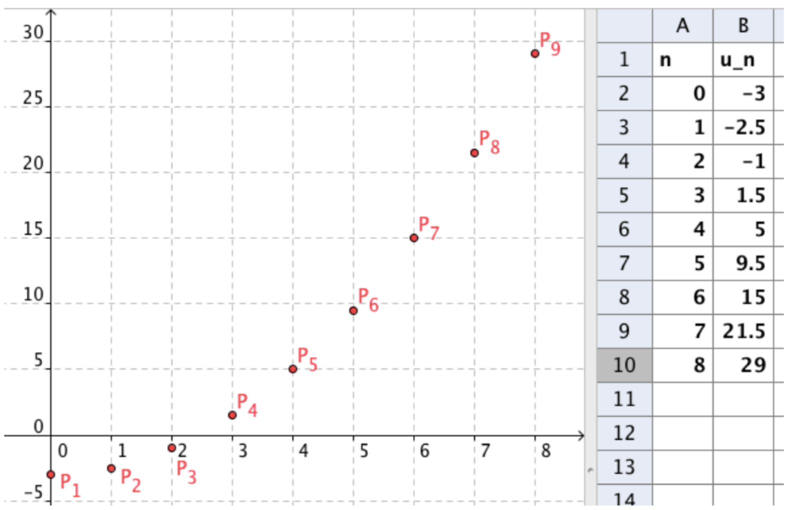
Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	$-2,5$	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

Il est possible d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.



II. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique U_n où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 3$,
$U_1 = 8$,
$U_2 = 13$,
$U_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3. La suite est donc définie par : $U_{n+1} = U_n + 5$ et $U_0 = 3$.

Définition

Une suite U_n est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = U_n + r$. Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode - Démontrer si une suite est arithmétique

1) La suite U_n définie par : $U_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite V_n définie par : $V_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $U_{n+1} - U_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 9.
U_n est une suite arithmétique de raison 9.

2) $V_{n+1} - V_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
V_n n'est pas une suite arithmétique.

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 + nr$.

Démonstration

La suite arithmétique U_n de raison r et de premier terme U_0 vérifie la relation $U_{n+1} = U_n + r$.
En calculant les premiers termes :
$U_1 = u_0 + r$
$U_2 = u_1 + r$
$U_3 = u_2 + r$

$U_n = U_{n-1} + r$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :
$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1} + n \times r$
Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques : $U_n = U_0 + nr$

Méthode - Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique U_n tel que $U_5 = 7$ et $U_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite U_n.
2) Exprimer U_n en fonction de n.

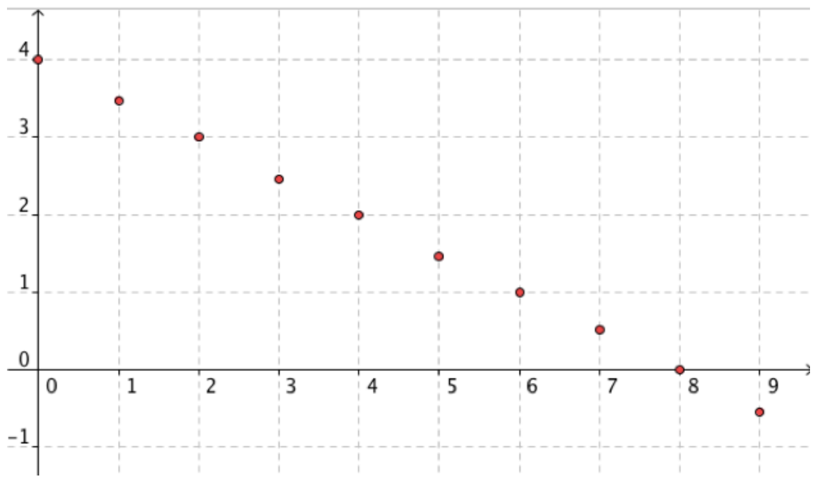
1) Les termes de la suite sont de la forme $U_n = U_0 + nr$
Ainsi $U_5 = U_0 + 5r = 7$ et $U_9 = U_0 + 9r = 19$.
En soustrayant membre à membre, on obtient :
$U_0 + 5r - U_0 - 9r = 7 - 19$
Soit : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.
Comme $U_0 + 5r = 7$, on a : $U_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $U_0 = -8$.

2) $U_n = U_0 + nr$ soit $U_n = -8 + n \times 3$ ou encore $U_n = 3n - 8$

2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite de raison $0,5$ et de premier terme 4.



III. Somme des termes consécutifs : suite arithmétique

Propriété

n est un entier naturel non nul alors on a : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Remarque Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1

Démonstration

	1	+	2	+	3	+	...	+	n-1	+	n
+	n	+	n-1	+	n-2	+	...	+	2	+	1
	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+	...	+	(n+1)	+	(n+1)

Donc : $2 \times (1+2+3+...+(n-1)+n) = n(n+1)$

Et donc : $1+2+3+...+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$S_1 = 1+2+3+...+348$ $S_2 = 33+36+39+...+267$

$$S_1 = 1+2+3+...+348 = \frac{348 \times 349}{2} = 60726$$

$S_2 = 33+36+39+...+267 = 3 \times (11+12+13+...+89)$
$= 3 \times ((1+2+3+...+89) - (1+2+3+...+10))$
$= 3 \times \left(\dfrac{89 \times 90}{2} - \dfrac{10 \times 11}{2}\right) = 11\,850$

IV. Suites géométriques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique U_n où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 5,\ \ U_1 = 10,\ \ U_2 = 20,\ \ U_3 = 40.$
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $U_{n+1} = 2 \times U_n$ et $U_0 = 5$.

Définition

Une suite U_n est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = q \times U_n$. Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode - Démontrer si une suite est géométrique

La suite U_n définie par : $U_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?
$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \dfrac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$
Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
U_n est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $U_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exemple - exemple concret : On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par $1,04$. Ce capital suit une progression géométrique de raison $1,04$.

On a ainsi :
$U_1 = 1,04 \times 500 = 520$
$U_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$
$U_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $U_{n+1} = 1,04 \times U_n$ avec $U_0 = 500$
On peut également exprimer U_n en fonction de n : $U_n = 500 \times 1,04^n$.

Propriété

U_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 \times q^n$.

Démonstration

La suite géométrique U_n de raison q et de premier terme U_0 vérifie la relation $U_{n+1} = q \times U_n$.

- Si q ou U_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que q et U_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :
$U_1 = q \times U_0$
$U_2 = q \times U_1$
$U_3 = q \times U_2$

$U_n = q \times U_{n-1}$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient : $u_1 \times U_2 \times U_3 \times \quad \times U_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \quad \times u_{n-1} \times q^n$.
Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques : $U_n = U_0 \times q^n$

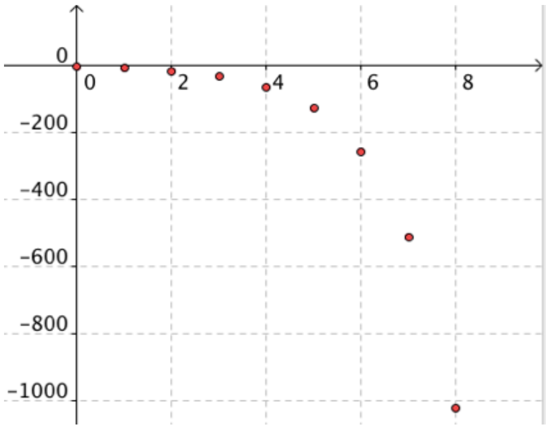
Méthode - Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique U_n tel que $U_4 = 8$ et $U_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite U_n.

Les termes de la suite sont de la forme $U_n = U_0 \times q^n$.
Donc : $U_4 = U_0 \times q^4 = 8$ et $U_7 = U_0 \times q^7 = 512$.
Ainsi : $\dfrac{U_7}{U_4} = \dfrac{U_0 \times q^7}{U_0 \times q^4} = q^3$ et $\dfrac{U_7}{U_4} = \dfrac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi $q =^3 \sqrt{64} = 4$
Comme $U_0 \times q^4 = 8$, on a : $U_0 \times 4^4 = 8$ et donc : $U_0 = \dfrac{1}{32}$.

2) Représentation graphique

Exemple : La suite géométrique U_n définie par $U_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

V. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :
$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Remarque Il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$
$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^(n + 1)$

Ainsi :
$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1})$
$S - q \times S = 1 - q^(n+1)$
$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$
$S = \dfrac{1 - q^(n+1)}{1 - q}$

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{13}$

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{13} = \dfrac{1 - 3^{14}}{1 - 3} = 2\,391\,484$

Chapitre 10

Fonction exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

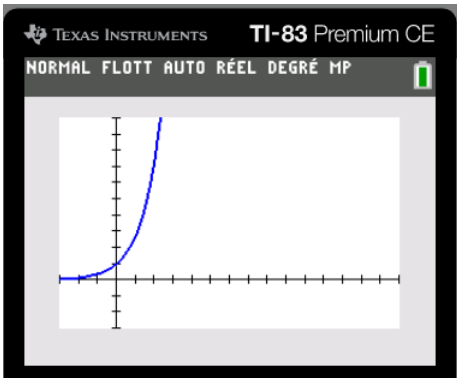
Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence

$\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(x))' = \exp(x)$

2) Variations

Propriété

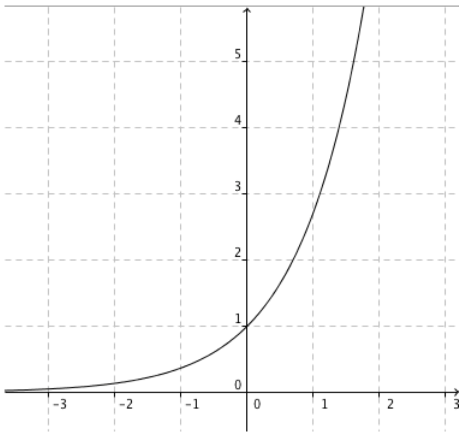
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(\exp(x))' > 0$ car $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp(x))'$	$+$	
$\exp(x)$	0 ↗	$+\infty$



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) relation fonctionnelle

Théorème

Pour tous réels x et y, on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarque Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Corollaire

Pour tous réels x et y, on a :

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ ou encore $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = \exp(x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration - Démonstration du a et b

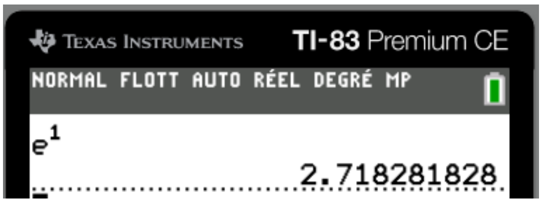
- $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$
- $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

2) Le nombre e

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
On a ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$

Remarque Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.



Notation

$\exp(x) = \exp(1 \times x) = (\exp(1))^x = \mathrm{e}^x$
On note pour tout x réel, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés

Pour tous réels x et y, on a :

1) $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = e$
2) $\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
3) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$ $\qquad \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ $\qquad \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ $\qquad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$
4) $(\mathrm{e}^{ax+b})' = a\mathrm{e}^{ax+b}$

Méthode - Dériver une fonction exponentielle

Enoncé : Dériver les fonctions suivantes.

1) $f(x) = 4x - 3\mathrm{e}^x$
2) $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$
3) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$
4) $j(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$

Réponse :

1) $f'(x) = 4 - 3e^x$

2) $g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

3) $h'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

4) $j'(x) = 3e^{3x+2}$

Méthode - Simplifier les écritures

Enoncé : Simplifier l'écriture des nombres suivants.

1) $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$

2) $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

3) $C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

4) $D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Réponse :

1) $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^3}{e^{-5}} = e^{3-(-5)} = e^8$

2) $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{5\times(-6)} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30-3} = e^{-33}$

3) $C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \dfrac{1}{e^{-3\times 2}} + \dfrac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}} = \dfrac{1}{e^{-6}} + \dfrac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$

4) $D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \dfrac{e^{2x\times 3}}{e^{3x+1-x-1}} = \dfrac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$

Propriétés

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

Méthode - Résoudre une équation ou une inéquation

Enoncé :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Réponse :

1) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0 \iff e^{x^2-3} = e^{-2x} \iff x^2 - 3 = -2x \iff x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

Donc $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$ ou $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

Les solutions sont 3 et 1.

2) $e^{4x-1} \geq 1 \iff e^{4x-1} \geq e^0 \iff 4x - 1 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,; +\infty\right[$.

Méthode - Étudier une fonction exponentielle

Enoncé : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.

1) Calculer la dérivée de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

4) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

Réponse :

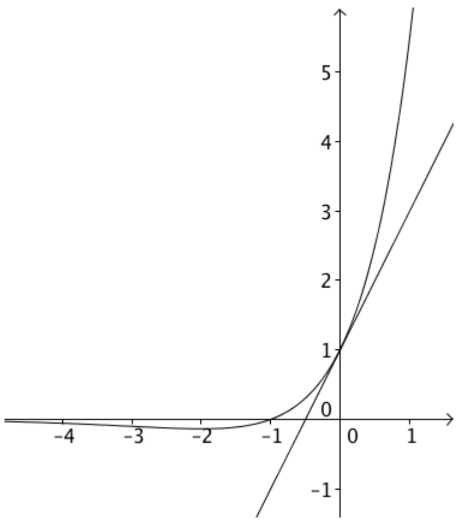
1) $f'(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$

2) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

3) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit : $y = 2x+1$

4)



IV. Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

1) variations

Propriété

La fonction $t \mapsto e^{kt}$ avec $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \mapsto ke^{kt}$

Démonstration

On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \mapsto g(at+b)$ est $t \mapsto ag'(at+b)$ En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

Exemple : Soit $f(t) = e^{-4t}$ alors $f'(t) = -4e^{-4t}$.

Propriété

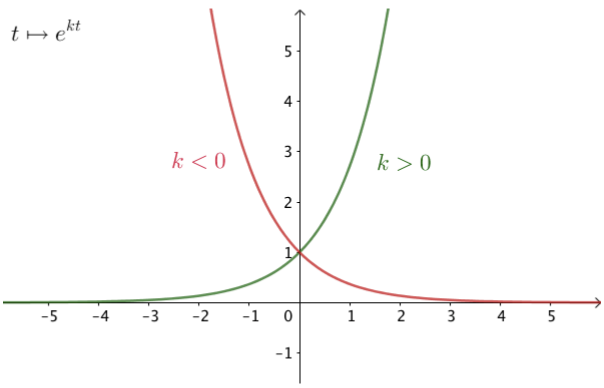
- Si $k > 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est décroissante.

Démonstration

On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$
Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.
Donc le signe de la dérivée $t \mapsto ke^{kt}$dépend du signe de k.

- Si $k > 0$ alors la dérivée est positive est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante.
- Si $k < 0$ alors la dérivée est négative est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est décroissante.

2) Représentation graphique



Méthode - Étudier une fonction $t \mapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Enoncé :
Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0;10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.

2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.

3) Déterminer les variations de f sur $[0;10]$.

4) **a)** À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Réponse :

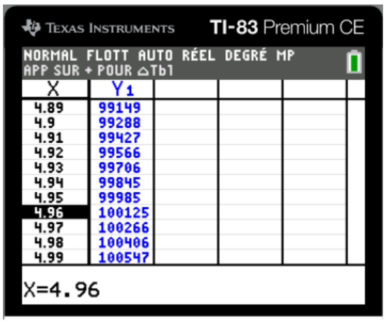
1) $f'(t) = A \times 0,14e^{0,14t} = 0,14 \times Ae^{0,14t} = 0,14f(t)$.
La fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ vérifie bien l'égalité $f'(t) = 0,14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0,14\times 0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0,14t}$.

3) Comme $k = 0,14 > 0$, on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{0,14t}$ est strictement croissante sur $[0;10]$. Il en est de même pour la fonction f.

4) **a)** $f(3) = 50000e^{0,14\times 3} = 50000e^{0,42} \approx 76000$
$f(5,5) = 50000e^{0,14\times 5,5} = 50000e^{0,77} \approx 108000$
Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.



Chapitre 11

Application de la dérivation

I. Étude des variations d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

1) Exemple d'une fonction du second degré

Méthode - Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Enoncé : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Réponse :

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.
2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $4x - 8 = 0$
Donc $4x = 8$ et $x = \frac{8}{4} = 2$.
La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis ensuite positive (après $x = 2$).

3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-7	↗	

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.
La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

2) Exemple d'une fonction du troisième degré

Méthode - Dresser le tableau de variations d'une fonction polynôme du 3e degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

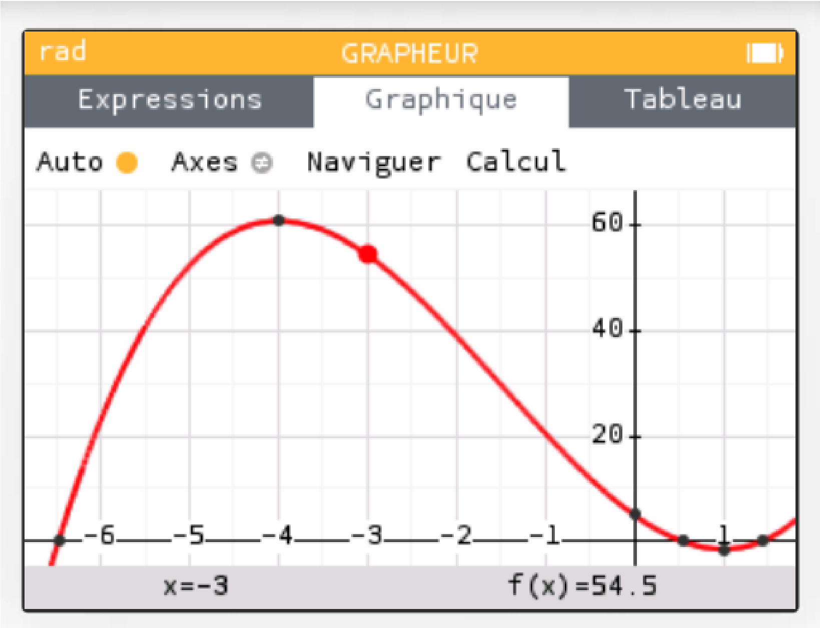
2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.
Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 92 - 4 \times 3 \times (12) = 225$
L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

2)



II. Extremum d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$.

Méthode - Rechercher un extremum

Enoncé :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Réponse :
Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$
Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{71}{20}$	$\nearrow$	

En effet : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$

La fonction f admet donc un minimum égal à $\frac{71}{20}$ en $x = \frac{3}{10}$.

III. Position relative de deux courbes

Méthode - Position relative de deux courbes

Enoncé :
Soit f et g deux fonctions définies sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Réponse :
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 18$.

Pour tout x de $[2; +\infty[$, on a :
$h'(x) = 3x^2 + 5$
Donc $h'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
On construit le tableau de variations :

x	2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	

$h(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$
D'après le tableau de variations, on a $h(x) \geq 0$.
Soit : $f(x) - g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq g(x)$.
On en déduit que la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Chapitre 12

Variables aléatoires

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : « *On lance un dé à six faces et on regarde le résultat.* »
L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1;2;3;4;5;6\}$ s'appelle l'univers des possibles.
Il se note Ω.
On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $E = \{1;2;3;4;5;6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.
Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$ Pour l'issue 1, on a : $X = 3$ Pour les issues 3 et 5, on a : $X = -4$.

Définition

Une **variable aléatoire X** associe un nombre réel à chaque issue de l'univers Ω.

2) Loi de probabilité

Définition

La **probabilité de lévénement** $\{X = x_i\}$ est la somme des probabilités des issues de X auxquelles on associe le réel x_i.

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. **Définir la loi de probabilité** de la variable aléatoire X, cest associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de lévénement $\{X = x_i\}$.
On présente souvent la loi de probabilité de X sous la forme dun tableau.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.
Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$. La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.
On note : $P(X=2)=\frac{1}{2}$.
De même : $P(X=3)=\frac{1}{6}$ et $P(X=-4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarques

- $P(X=x_i)$ peut se noter p_i.
- $p_1+p_2+...+p_n=1$

Exemple : Dans l'exemple traité plus haut : $p_1+p_2+p_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$.

Méthode - Déterminer une loi de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : « *On tire une carte dans un jeu de* 32 *cartes.* »
On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer $P(X\geq 5)$ et interpréter le résultat.

1) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cur, on gagne 5(roi) + 2(cur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cur (autre que le roi de cur), $X=2$.
  $P(X=2)=\frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cur), $X=5$.
  $P(X=5)=\frac{3}{32}$.
- Si la carte tirée est le roi de cur, $X=7$.
  $P(X=7)=\frac{1}{32}$.

- Si la carte tirée n'est ni un cur, ni un roi, $X = -1$.
  $P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

2) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

La probabilité de gagner plus de 5 € est égale à $\frac{1}{8}$.

II. Espérance, variance et écart-type

1) Espérance

Définition

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$$

Méthode - Déterminer une loi de probabilité

Dans le jeu de la « *Méthode* » du paragraphe précédent, calculer l'espérance de la loi de probabilité de X et interpréter le résultat.

$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32}$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner environ 0,50 € par partie.

Remarque L'espérance est donc le gain moyen par partie que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois. Dans tous les jeux au casino l'espérance est négative. Sur un grand nombre de parties, c'est le casino qui est gagnant.

2) Variance et écart-type

Définitions

- La variance de X est le nombre réel, noté $Var(X)$, défini par :

$$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$

- L'écart-type de X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par, $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Méthode - Déterminer une variance et un écart-type

Dans le jeu de la « *Méthode* » précédente, calculer la variance et l'écart-type.

On rappelle que $E(X) = \dfrac{15}{32}$

$Var(X) = \dfrac{21}{32} \times (-1 - \dfrac{15}{32})^2 + \dfrac{7}{32} \times (2 - \dfrac{15}{32})^2 + \dfrac{3}{32} \times (5 - \dfrac{15}{32})^2 + \dfrac{1}{32} \times (7 - \dfrac{15}{32})^2 = \dfrac{5311}{1024} \approx 5,19$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\dfrac{5311}{1024}} \approx 2,28$

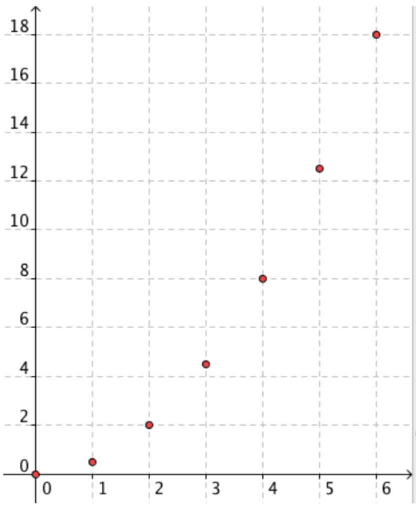
L'écart-type est d'environ $2,28$. Plus l'écart-type est petit, plus les résultats des parties seront proches de l'espérance. Un grand écart-type signifie donc que vous pouvez avoir des résultats très différents que ce qui est prévu (en positif comme en négatif).

Chapitre 13

Variations de suites

I. Sens de variation d'une suite numérique

Exemple : On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n) :



	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	0.5
4	2	2
5	3	4.5
6	4	8
7	5	12.5
8	6	18
9	7	24.5
10	8	32
11	9	40.5
12	10	50
13	11	60.5
14	12	72
15		

On peut conjecturer que cette suite est croissante. On constate par exemple que $u_1 < u_2$ ou encore $u_4 < u_5$. De manière générale, on peut écrire : $u_n < u_{n+1}$

Définitions

Soit une suite numérique (u_n).

- La **suite** (u_n) **est croissante** signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La **suite** (u_n) **est décroissante** signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Méthode - Étudier les variations d'une suite

Énoncé :

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + 2$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (v_n) définie par : $v_n = 4n + 4$.
Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

Réponse :

1) $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$
On en déduit que (u_n) est croissante.

2) On commence par calculer la différence $v_{n+1} - v_n$:

On a : $v_n = 4n+4$ donc $v_{n+1} = 4(n+1)+4 = 4n+4+4 = 4n+8$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 4n+8-(4n+4) \\ &= 4n+8-4n-4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

On étudie ensuite le signe de $v_{n+1} - v_n$:
Pour tout n entier $v_{n+1} - v_n = 4 > 0$.
On en déduit que la suite (v_n) est croissante.

II. variation d'une suite arithmétique

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite U_n est décroissante.

Démonstration

$U_{n+1} - U_n = U_n + r - U_n = r$.

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$ et la suite U_n est croissante.
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$ et la suite U_n est décroissante.

Exemple : La suite arithmétique U_n définie par $U_n = 8 - 3n$ est décroissante car de raison négative et égale à -3.

III. variation d'une suite géométrique

Propriété

U_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul U_0.
Pour $U_0 > 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite U_n est décroissante.

Pour $U_0 < 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite U_n est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite U_n est croissante.

Démonstration - cas où $U_0 > 0$

$U_{n+1} - U_n = U_0 \times q^{n+1} - U_0 \times q^n = U_0 \times q^n \times (q-1)$.

- Si $q > 1$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$ et la suite U_n est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$ et la suite U_n est décroissante.

Chapitre 14

Application du produit scalaire

I. Produit scalaire et norme

1) Propriétés

Propriété

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Démonstration - Démonstration de la première formule

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

Démonstration

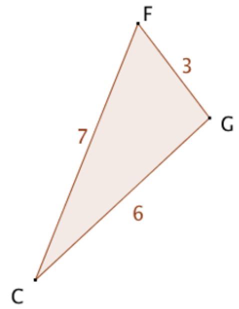
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\end{aligned}$$

Exemple : Si AB = 6, AC = 5 et CB = 4 alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 5^2 - 4^2\right) = \frac{1}{2}(36 + 25 - 16) = \frac{45}{2}$$

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

Enoncé :
On considère la figure ci-dessous, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$



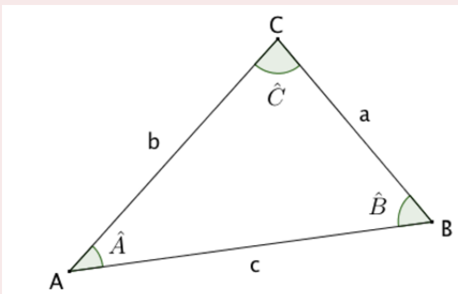
Réponse :
$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - GF^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right)$
$= 38$

2) Théorème d'Al Kashi

Théorème

Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



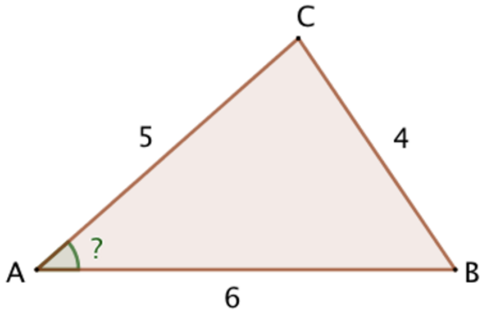
Démonstration

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\hat{A} = bc\cos\hat{A}$
et
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$
Donc : $\frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = bc\cos\hat{A}$

Soit : $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \hat{A}$
Soit encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Méthode - Calculer un angle à l'aide des normes

Enoncé :
On considère la figure ci-dessous, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



Réponse :
D'après le théorème d'Al Kashi, on a :
$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$
$16 = 36 + 25 - 60 \cos \widehat{BAC}$
$60 \cos \widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$
$60 \cos \widehat{BAC} = 45$
$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{45}{60}$
$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$

II. Vecteur Normal

1) définition et propriétés

Définition

Un **vecteur normal** à une droite d quelconque du plan est un vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de d.

Propriété

Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'une est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Démonstration

On suppose que d et d' sont perpendiculaires. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}$ de d', alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. $\vec{v}$ étant normal à d et $\vec{u}$ à d', la propriété est vérifiée.
Réciproquement, si $\vec{u}$, vecteur normal à d, est orthogonal à $\vec{v}$, vecteur normal à d', alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}$ de d'. Ayant des vecteurs directeurs orthogonaux, d et d' sont perpendiculaires.

Méthode

Enoncé :

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une condition sur les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ non nul pour qu'il soit normal à d.

2) Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal à d ?

Réponse :

1) Si $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d, alors il est orthogonal à $\vec{u}$.

Donc $\vec{u}\cdot\vec{n} = 3x + 5y = 0$ soit $y = -\dfrac{3}{5}x$.

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}x\\-\dfrac{3}{5}x\end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

2) On calcule le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times(-10) + 5\times 6 = -30 + 30 = 0$
le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d, donc $\vec{v}$ est un vecteur normal à d.

2) Équations cartésiennes et vecteur normal

Rappel

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$. Un **vecteur directeur** de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Propriété

Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.

La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour **vecteur normal** le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Réciproquement, toute droite ayant pour **vecteur normal** le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple : La droite d'équation cartésienne $3x - 4y + 5 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a bien $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

Méthode

Enoncé :

Dans un repère orthonormé, déterminer, de deux façons différentes, une équation cartésienne de la droite d passant par le point $\mathrm{A}(5; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Réponse :

1) 1. On lit sur le vecteur normal que $a = 2$ et $b = -3$. Donc une équation de d est de la forme $2x - 3y + c = 0$. $\mathrm{A}(5; -1) \in d$ donc $2 \times 5 - 3 \times (-1) + c = 0$ et donc $c = -13$. Ainsi, une équation de la droite d est $2x - 3y - 13 = 0$.

2) Soit $\mathrm{M}(x; y)$ appartenant à d. Alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est un vecteur directeur de d et est orthogonal au vecteur $\vec{n}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-5 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \iff 2(x-5) - 3(y+1) = 0 \iff$ $2x - 3y - 13 = 0$

Donc une équation de la droite d est $2x - 3y - 13 = 0$