Chapitre 1

Thème 1 : Modèles définis par une fonction Dérivation

I. Rappels sur la dérivation

1) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.

L est le nombre dérivé de f en a.

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition

La **Tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Méthode - Déterminer l'équation d'une tangente

Enoncé :
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
Réponse :

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ donc } f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

Or, $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$ Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit :

$$y = 7(x-2) + 9 \text{ soit encore } y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

2) formule de dérivation

Fonction	Dérivée
$a, a \in \mathbb{R}$	0
$ax, a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
$x^n, n \geqslant 1$ entier	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$; $n \geqslant 1$ entier	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$e^{kx}, k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Méthode - Déterminer la fonction dérivée

Enoncé :
Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \left(2x^2-5x\right)(3x-2)$

2) $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

Réponse :

1) $f(x) = \left(2x^2-5x\right)(3x-2)$
$f(x) = u(x)v(x)$ avec :

$$u(x) = 2x^2-5x \rightarrow u'(x) = 4x-5$$
$$v(x) = 3x-2 \rightarrow v'(x) = 3$$
$$\text{Donc } : f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = (4x-5)(3x-2)+\left(2x^2-5x\right)\times 3$$
$$= 12x^2-8x-15x+10+6x^2-15x$$
$$= 18x^2-38x+10$$

2) $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x-5 \rightarrow u'(x) = 6$$
$$v(x) = x^3-2x^2-1 \rightarrow v'(x) = 3x^2-4x$$

Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{6\left(x^3-2x^2-1\right)-(6x-5)\left(3x^2-4x\right)}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2} \\ &= \frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2} \\ &= \frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2} \end{aligned}$$

3) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Méthode - Déterminer les variations d'une fonction

Enoncé :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.
Déterminer les variations de la fonction f.
Réponse :
Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$. Résolvons l'inéquation : $f'(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} 2x-4 &\leqslant 0 \\ 2x &\leqslant 4 \\ x &\leqslant 2 \end{aligned}$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.
De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

II. Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Méthode - Déterminer la dérivée d'une fonction composée

Enoncé :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

1) $f(x) = \left(2x^2+3x-3\right)^2$

2) $g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Réponse :

1) On pose : $f(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \to u'(x) = 4x + 3$
Donc : $f'(x) = 2u'(x)u(x)$
$= 2(4x+3)\left(2x^2+3x-3\right)$

2) On pose : $g(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x} \to u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
Donc :

$$g'(x) = 2u'(x)e^{u(x)} \quad = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$
$$= -\frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Méthode - Étudier une fonction composée

Enoncé :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

1) Calculer la dérivée de la fonction f.

2) En déduire les variations de la fonction f.

Réponse :

1) On a :

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

En effet : $\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

2) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \dfrac{x}{2}$.
f' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.