

Chapitre 01 - Dérivation

Correction Exercices obligatoires

Exercice 1

Pour chaque fonction f , calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x + 5e^x + \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = x^2 - 6 + 5e^x - \frac{3}{x^2} = \frac{x^4 - 6x^2 + 5x^2e^x - 3}{x^2}$$

2) $f(x) = 2e^{3x-1}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 2e^{u(x)} \text{ avec } u(x) = 3x - 1 \text{ donc } u'(x) = 3$$

$$f'(x) = 2u'(x)e^{u(x)} = 2 \times 3 \times e^{3x-1} = 6e^{3x-1}$$

3) $f(x) = (5x + 4)^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = u(x)^2 \text{ avec } u(x) = 5x + 4 \text{ donc } u'(x) = 5$$

$$f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times 5 \times (5x + 4) = 10(5x + 4)$$

4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = f(u(x)) \text{ avec } u(x) = 1 + x^2 \text{ donc } u'(x) = 2x$$

$$\text{et } f(X) = \sqrt{X} \text{ donc } f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(x) = u'(x)f'(u(x)) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2 – Dériver avec des fonctions de référence

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ pour tout x réel.

$$f'(x) = 6x - 5$$

2) $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8$ pour tout x réel.

$$f'(x) = 5x^2 - x$$

3) $f(x) = -x^3 + 5x^2 + \frac{4}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

$$f'(x) = -3x^2 + 10x - \frac{4}{x^2} = \frac{-3x^4 + 10x^3 - 4}{x^2}$$

4) $f(x) = 3e^x - 5x^2 + 4$ pour tout x réel.

$$f'(x) = 3e^x - 10x$$

5) $f(x) = (3x - 5)(x + 1)$ pour tout x réel.

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = 3x - 5 \text{ et } v(x) = x + 1$$

$$\text{donc } u'(x) = 3 \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{d'ou } f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f'(x) = 3(x + 1) + 1(3x - 5) = 6x - 2$$

6) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ pour tout x réel.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 4x \text{ et } v(x) = x^2 + 1$$

$$\text{donc } u'(x) = 4 \text{ et } v'(x) = 2x$$

$$\text{d'ou } f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 2x(4x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

Exercice 3 – Dériver e^u

- 1) $f(x) = e^{-x}$ pour tout x .

$$f'(x) = -e^{-x}$$

- 2) $f(x) = 10e^{-0,5x}$ pour tout x .

$$f'(x) = 10 \times -0,5e^{-0,5x} = -5e^{-0,5x}$$

- 3) $f(x) = \frac{e^x}{e^{-x} + 1}$ pour tout x .

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^{-x} + 1$$

$$\text{donc } u'(x) = e^x \text{ et } v'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{-x} + 1) + e^{-x} \times e^x}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{e^x + 2}{(e^{-x} + 1)^2}$$

Exercice 4 – Dériver u^2 et $\sqrt{u}$

- 1) $f(x) = (3x - 4)^2$ pour tout x réel.

$$f'(x) = 2 \times 3(3x - 4) = 6(3x - 4)$$

- 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ pour tout x réel.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 + 4}$$

Exercice 5 – Signe de la dérivée

- 1) Calculer la dérivée de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{-0,5x}$.

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = x \text{ et } v(x) = e^{-0,5x}$$

$$\text{donc } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$$

$$\text{d'où } f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f'(x) = 1e^{-0,5x} - x \times 0,5e^{-0,5x} = (1 - 0,5x)e^{-0,5x}$$

- 2) Déterminer le signe de $f'(x)$.

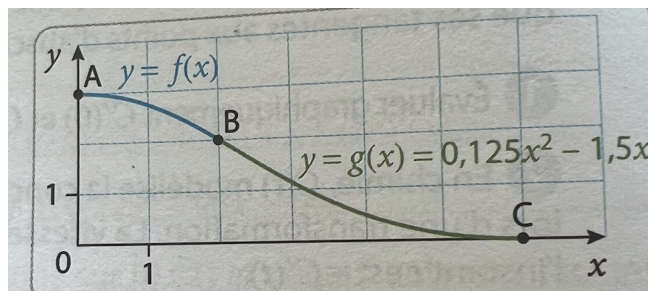
le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 0,5x$ car l'exponentielle est toujours positive.

$1 - 0,5x$ est une fonction affine qui s'annule pour $x = 2$ avec $m = -0,5 < 0$.

$1 - 0,5x$ et $f'(x)$ sont donc positives sur $] -\infty; 2]$ puis négatives ensuite.

Exercice 6 – Un problème de raccord

Pour terminer une rampe d'accès à un parking, on souhaite raccorder la portion existante, représentée en vert sur le graphique, avec un dernier tronçon, en bleu, allant de A à B(2;2). Les deux tronçons doivent se raccorder parfaitement, sans rupture de pente et la descente démarrer doucement en A(0;3) avec une pente nulle. L'unité graphique représente 1 m.



- 1) Interpréter ces contraintes par des conditions que doit respecter la fonction f .

Le tronçon en bleu rejoint le point B, donc $f(2) = 2$.

La pente doit être la même en B des 2 côtés donc $f'(2) = g'(2)$.

La pente est nulle au départ donc $f'(0) = 0$ et elle démarre du point A donc $f(0) = 3$

- 2) Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = -0,25x^2 + 3$ remplit toutes ces conditions.

$$f'(x) = -0,5x \text{ et } g'(x) = 0,25x - 1,5$$

$$f(2) = -0,25 \times 2^2 + 3 = 2$$

$$f'(2) = -0,5 \times 2 = -1 \text{ et } g'(2) = 0,25 \times 2 - 1,5 = -1 = f'(2)$$

$$f(0) = -0,25 \times 0^2 + 3 = 3 \text{ et } f'(0) = -0,5 \times 0 = 0.$$

Toutes les conditions sont respectées avec la fonction $f(x)$ proposée.

Exercice 7 – Étude d'une fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $[0;6]$ par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

$$f'(x) = -x^2 + 4x = x(4 - x).$$

Comme $x \geq 0$, $f'(x)$, a même signe que $4 - x$.

Donc $f'(x) \geq 0$ sur $[0;4]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[4;6]$.

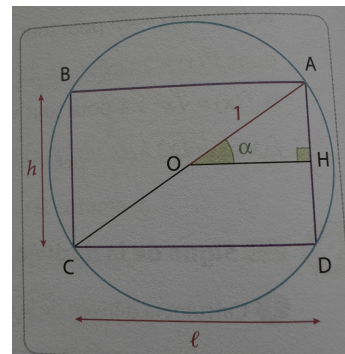
- 2) Compléter le tableau de variations de f et préciser son maximum.

x	0	4	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-5	$\frac{17}{3}$	-5

Le maximum de la fonction est donc $\frac{17}{3}$ atteint pour $x = 4$.

Exercice 8 – Résistance d'une poutre

Dans un tronc d'arbre on découpe une poutre en forme de parallélépipède rectangle dont une section rectangulaire est représentée ci-contre. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où ℓ et h sont la longueur et la largeur de la poutre. On prend $OA = 1$ unité de longueur.



- 1) Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$,

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \iff \ell^2 + h^2 = 2^2 \iff h^2 = 2^2 - \ell^2 \iff h^2 = 4 - \ell^2$$

- 2) En déduire que $\ell h^2 = f(\ell)$ où $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geq 0$.

$$\ell h^2 = \ell(4 - \ell^2) = -\ell^3 + 4\ell = f(\ell) \text{ avec } f(x) = -x^3 + 4x$$

- 3) a) Compléter le tableau de variations de f sur $[0; 2]$.

$$f'(x) = -3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 0 \iff -3x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

x	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$				

- b) Comment choisir (pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?

Il faut prendre pour ℓ la valeur de x ou on atteint le maximum de f , soit $\ell = x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

- c) Quel est l'angle α correspondant à $0,1^\circ$ près ?

Dans le triangle ABC $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{\ell}{2}$ d'où $\alpha = \arccos\left(\frac{\ell}{2}\right) \approx 54,7^\circ$

Exercice 9 – Evolution d'une population

La population d'une ville est modélisée depuis 2020 par la fonction f donnée par $f(t) = \frac{40t}{t^2 + 25} + 10$, où t désigne le temps écoulé depuis le 1er janvier 2020, en années, et $f(t)$ la population en dizaines de milliers d'habitants.

- 1) Montrer que $f'(t) = 40 \frac{(5-t)(5+t)}{(t^2 + 25)^2}$,

$$f(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \text{ avec } u(t) = 40t \text{ et } v(t) = t^2 + 25$$

$$\text{donc } u'(t) = 40 \text{ et } v'(t) = 2t$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{40(t^2 + 25) - 2t(40t)}{(t^2 + 25)^2} = \frac{40(t^2 + 25 - 2t^2)}{(t^2 + 25)^2} = \frac{40(25 - t^2)}{(t^2 + 25)^2} = \frac{40(5 - t)(5 + t)}{(t^2 + 25)^2} = 40 \frac{(5 - t)(5 + t)}{(t^2 + 25)^2}$$

- 2) En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 15]$,

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

x	0	5	15
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	10	14	$12,4$

- 3) Quelle sera la population maximale dans ce modèle et en quelle année sera-t-elle atteinte ?

La population maximale est atteinte pour, $t = 5$, donc en 2025, et correspond à 14 dizaines de milliers d'h soit 140 000 habitants.