

Chapitre 2

Thème 1 : Modèles définis par une fonction

Continuité d'une fonction

I. Notion de continuité

Point histoire



Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1) Définition

Définition

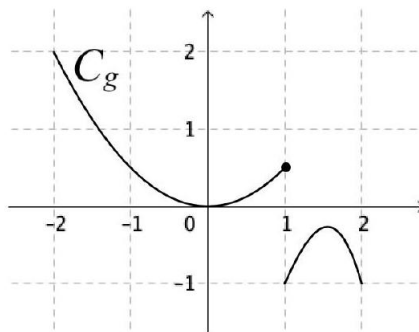
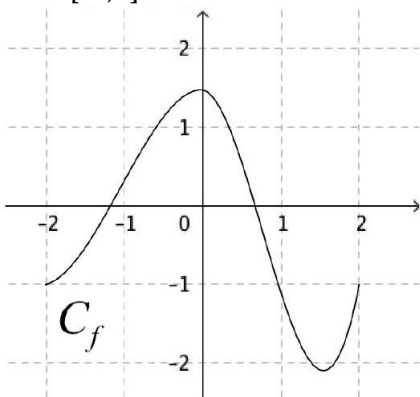
Définition intuitive :

Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Méthode - Reconnaître graphiquement une fonction continue

Énoncé :

Étudier graphiquement la continuité des fonctions f et g définies et représentées ci-dessous sur l'intervalle $[-2; 2]$.



Réponse :

- La courbe de la fonction f peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l'intervalle $[-2; 2]$.
- La courbe de la fonction g ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n'est donc pas continue sur l'intervalle $[-2; 2]$.
Cependant, elle semble continue sur $[-2; 1]$ et sur $]1; 2]$.

⚙️ Propriété

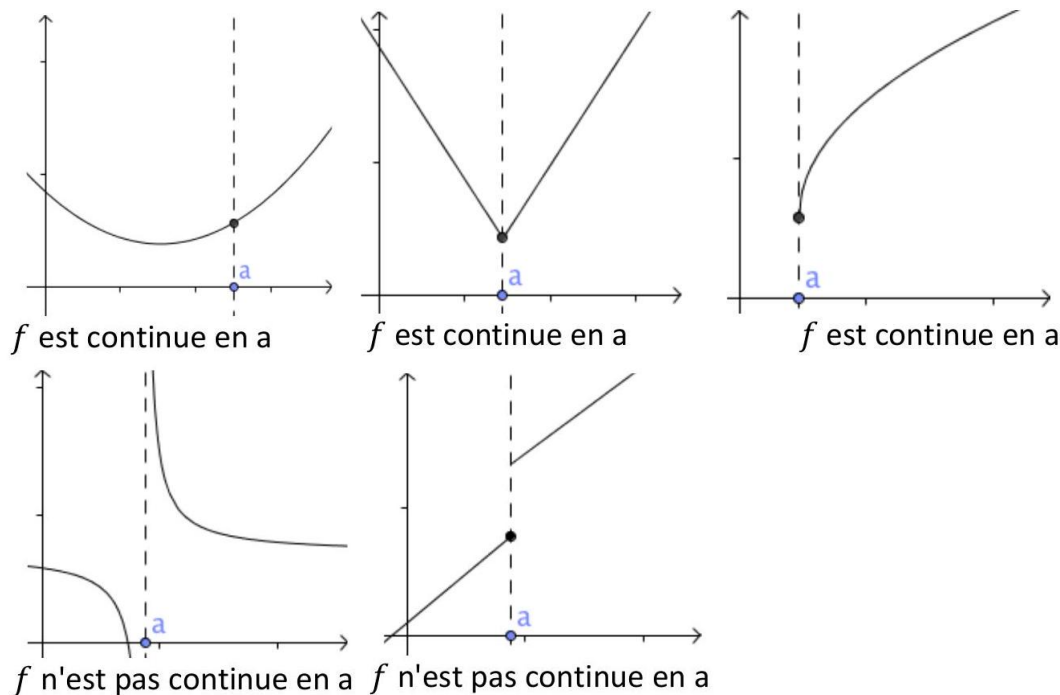
Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

- f est continue en a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

🔑 Théorème

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I , alors elle est continue sur cet intervalle.

🔗 Exemples :



2) Cas des fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle donné.

Fonction	Intervalle
$ x $	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
Polynôme	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$] - \infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

3) Opérations sur les fonctions continues :

Propriétés

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I .

- $f + g, f \times g, f^2$ et e^f sont continues sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Remarque Dans la pratique, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Méthode - Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

Énoncé :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{pour } x < 3 \\ x - 4, & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ -2x + 13, & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Réponse :

Les fonctions $x \mapsto -x + 2$, $x \mapsto x - 4$ et $x \mapsto -2x + 13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $] -\infty; 3[$, sur $[3; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.

Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -x + 2 = -3 + 2 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

Et donc la fonction f est continue en 3.

- $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x - 4 = 5 - 4 = 1$

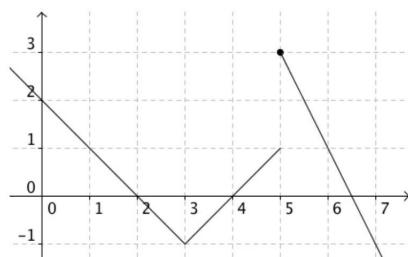
$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} -2x + 13 = -2 \times 5 + 13 = 3$$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $] -\infty; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.

En représentant la fonction f , on peut observer graphiquement le résultat précédent.



II. Théorème des valeurs intermédiaires

Exemple : On donne le tableau de variations de la fonction f .

x	-4	-3	-1	1
$f(x)$	-1	3	-1	19

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f(x) = k$:

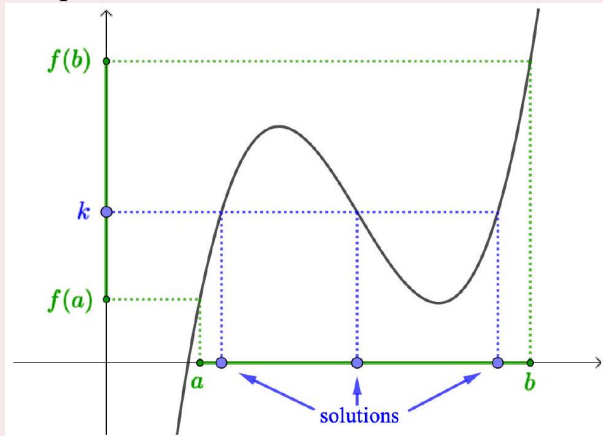
- L'équation $f(x) = 18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $] -1; 1[$.
- L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $] -4; -3[$, $] -3; -1[$ et $] -1; 1[$.
- L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.
- L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3 , l'autre comprise dans l'intervalle $] -1; 1[$.

Théorème

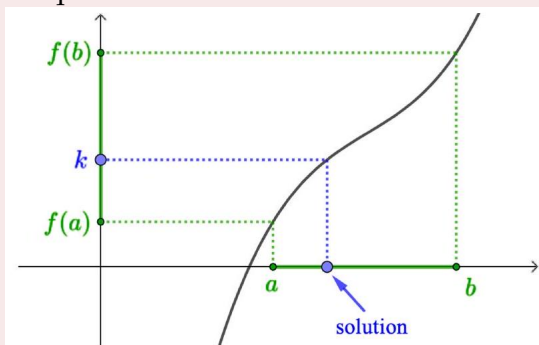
Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$.

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .



- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$, alors la solution est unique.



Manipulation

Dans la pratique :

Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a; b]$, on démontre que :

- 1) f est continue sur $[a; b]$,
- 2) f change de signe sur $[a; b]$,
- 3) f est strictement monotone sur $[a; b]$,

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.

Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

☞ Méthode - Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (1)

Énoncé :

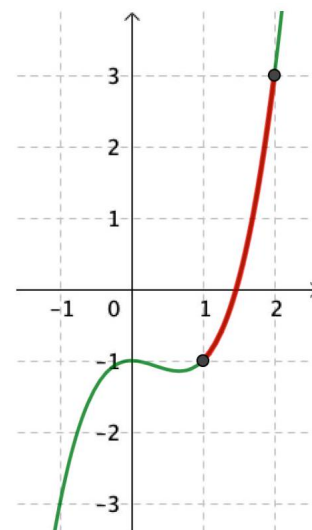
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

- 1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$.
- 2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α .

Réponse :

- 1)
 - La fonction f est continue sur l'intervalle $[1; 2]$, car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
 - $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = -1 < 0$
 $f(2) = 2^3 - 2^2 - 1 = 3 > 0$
 Donc la fonction f change de signe sur l'intervalle $[1; 2]$.
 - $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$
 Donc, pour tout x de $[1; 2]$, $f'(x) > 0$.
 La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution sur l'intervalle $[1; 2]$.



- 2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages successifs » en augmentant la précision.

La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.

En effet : $f(1,4) \approx -0,216 < 0$

$f(1,5) \approx 0,125 > 0$

rad GRAPHEUR		
Expressions	Graphique	Tableau
Résultats exacts ☐ Régler l'intervalle		
x	f(x)	
1	-1	
1.1	-0.879	
1.2	-0.712	
1.3	-0.493	
1.4	-0.216	
1.5	0.125	
1.6	0.536	
1.7	1.033	

La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.

En effet : $f(1,46) \approx -0,019 < 0$

$f(1,47) \approx 0,0156 > 0$

On en déduit que : $1,46 < \alpha < 1,47$.

rad GRAPHEUR		
Expressions	Graphique	Tableau
Résultats exacts ☐ Régler l'intervalle		
x	f(x)	
1.42	-0.153112	
1.43	-0.120693	
1.44	-0.087616	
1.45	-0.053875	
1.46	-0.019464	
1.47	0.015623	
1.48	0.051392	
1.49	0.087849	

☞ Méthode - Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (2)

Énoncé :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1; 4]$.

Réponse :

- f est continue sur $[-1; 4]$ car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$
 $f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$

Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-1; 4]$.

 **Remarque** Ici, on n'a pas la stricte monotonie de f , donc on n'a pas l'unicité de la solution.