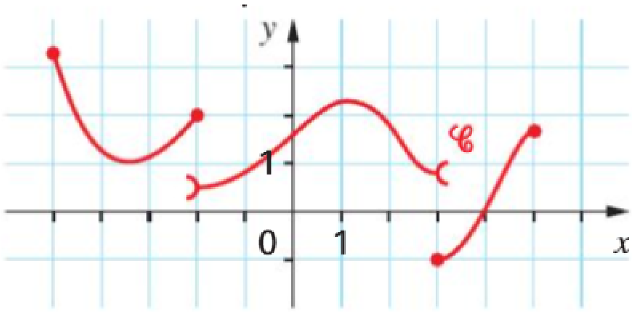
Chapitre 02 - Continuité
Exercices obligatoires

Exercice 1

On considère une fonction f définie sur $[-5;5]$ dont on donne la courbe représentative C ci-dessous.



Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) La fonction f est discontinue en 3 .

2) La fonction f est continue en 1 .

3) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3;3]$.

4) La fonction f est continue sur l'intervalle $]-2;3[$.

5) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-5;2]$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2 .

2) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 4

Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$

2) En déduire que l'équation $x^5 = 2x + 4$ possède au moins une solution sur $[1;2]$.

3) Donner une solution de cette équation au centième près.

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - 3x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x

2) Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;1]$?

3) Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(1)$?

4) En déduire que l'équation $e^x = 3x$ admet exactement une solution sur $[0;1]$.

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $[-3;6]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 8$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-3;6]$. Déterminer un encadrement de α au millième près.

3) En déduire le tableau de signes de g sur $[-3;6]$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[-2;1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - 3x + 1$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[-2;1]$.

3) Donner une valeur approchée au centième de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Exercice 10

On injecte du glucose à un patient. On estime que la glycémie, en gramme par litre de sang, au bout de t heures est modélisée par la fonction f définie sur $[\,0;7\,]$ par :

$$f(t) = 0,6\mathrm{e}^{-0,8t} + 0,84$$

1) Déterminer la glycémie au moment de l'injection.

2) Étudier le sens de variation de f. Interpréter.

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer, à $0,1$ h près, le temps au bout duquel :

a) la glycémie descend à 1,24 gramme par litre ;

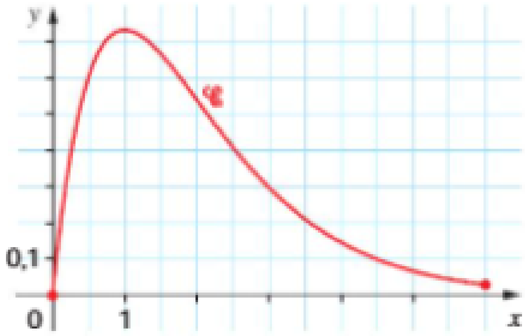
b) la glycémie aura diminué de 0,5 gramme par litre.

Exercice 11

À la suite d'un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air. On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air grâce à la fonction f définie sur $[0;6]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en partie par million (ppm). On donne la courbe représentative C de la fonction f sur $[0;6]$.



1) Déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.

2) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0,65$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[\,0;6\,]$, avec $x_1 < x_2$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de x_1 et de x_2 à 0,1 minute près.

3) On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse $0,65$ppm pendant plus d'une minute.
Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.