

Correction - DS n°01

Dérivation

Exercice 1 – 5 points

- 1) Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 6x^2 - 3x + 1$$

- 2) Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ pour $x \neq 4$.

$$f \text{ est du type } \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) = x+1 \text{ et } v(x) = x-4 \text{ d'où } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{(x-4) - (x+1)}{(x-4)^2} = \frac{-5}{(x-4)^2}$$

- 3) Calculer $f'(t)$ pour $f(t) = 40e^{-0,5t+2}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 40 \times (-0,5)e^{-0,5t+2} = -20e^{-0,5t+2}$$

- 4) Calculer $f'(t)$ pour $f(t) = (2t-1)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est du type } u \times v \text{ avec } u(t) = 2t-1 \text{ et } e^{-t} \text{ d'où } u'(t) = 2 \text{ et } v'(t) = -e^{-t}$$

$$f'(t) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 2e^{-t} - (2t-1)e^{-t} = (-2t+3)e^{-t}$$

- 5) Calculer $f'(t)$ pour $f(t) = (2t^2 - 3t + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est du type } f(u(t)) \text{ avec } u(t) = 2t^2 - 3t + 1 \text{ et } f(X) = X^2 \text{ d'où } u'(t) = 4t - 3 \text{ et } f'(X) = 2X$$

$$f'(x) = 2(4t-3)(2t^2-3t+1)$$

- 6) Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ sur $[-2; 2]$.

$$f \text{ est du type } f(u(x)) \text{ avec } u(x) = 4-x^2 \text{ et } f(X) = \sqrt{X} \text{ d'où } u'(x) = -2x \text{ et } f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Exercice 2 – 4 points

Le circuit électrique ci-contre est formé d'un générateur de force électromotrice $E = 12,0 \text{ V}$ (Volts), et de résistance interne $r = 5,0 \Omega$ et d'une résistance variable R , en Ohms (Ω).

La puissance absorbée par la résistance R est $\frac{144R}{(R+5)^2}$, en Watts.

- 1) Soit $P(R) = \frac{144R}{(R+5)^2}$.

- a) Calculer $P'(R)$, la dérivée de $P(R)$ sur $[0; +\infty[$.

$$P \text{ est du type } \frac{u}{v} \text{ avec } u(R) = 144R \text{ et } v(R) = (R+5)^2 \text{ d'où } u'(x) = 144 \text{ et } v'(x) = 2(R+5)$$

$$P'(R) = \frac{u'(R)v(R) - v'(R)u(R)}{v^2(R)} = \frac{144(R+5)^2 - 144R \times 2(R+5)}{(R+5)^4}$$

$$P'(R) = \frac{144R^2 + 1440R + 3600 - 288R^2 - 1440R}{(R+5)^4} = \frac{3600 - 144R^2}{(R+5)^4} = \frac{144(25 - R^2)}{(R+5)^4}$$

$$P'(R) = \frac{144(5-R)(5+R)}{(R+5)^4} = \frac{144(5-R)}{(R+5)^3}$$

- b) Dresser le tableau de signes de $P'(R)$ sur $[0; +\infty[$.

x	0	5	$+\infty$
$P'(R)$	+	0	-

- c) En déduire le tableau de variation de P sur $[0; +\infty[$.

x	0	5	$+\infty$
$P'(R)$	+	0	-
$P(R)$	0	$P(5) = 7,2$	0

- 2) En déduire la valeur de R pour laquelle la puissance est maximale et préciser cette puissance.

La puissance est maximale quand $R=5$ et alors $P=7,2W$

Exercice 3 – 4 points

Une personne a consommé de l'alcool au cours d'un repas. Le taux d'alcoolémie dans son organisme, en grammes par litre de sang, est donné par $A(t) = 5te^{-t}$ avec $0 \leq t \leq 6$, où t est le temps écoulé depuis la fin du repas, en heures.

- 1) Déterminer $A'(t)$.

A est du type $u \times v$ avec $u(t) = 5t$ et e^{-t} d'où $u'(t) = 5$ et $v'(t) = -e^{-t}$
 $f'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = 5(1-t)e^{-t}$

- 2) Dresser le tableau de signes de la dérivée sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$A'(t)$	+	0	-

- 3) en déduire le tableau de variation de la fonction $A(t)$ sur $[0; 6]$

x	0	1	6
$A'(t)$	+	0	-
$A(t)$		$A(1) \approx 1,84$	

- 4) préciser le maximum de la fonction et au bout de combien de temps est-il atteint ?

Le maximum de la fonction est environ 1,84 g/L de sang et il est atteint au bout d'une heure

Exercice 4 – 4 points

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$

- 1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

f est du type $f(u(x))$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $f(X) = e^X$ d'où $u'(x) = 6x + 2$ et $f'(X) = e^X$
 $f'(x) = (6x + 2)e^{3x^2+2x-1}$

- 2) Dresser le tableau de signes de la dérivée sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

- 3) En déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\square$	$f(-\frac{1}{3}) = 1$	$\square$

- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 .

$f'(-1) = -4$ et $f(-1) = 1$ donc $y = -4(x + 1) + 1 = -4x - 3$

Exercice 5 – 4 points

Soit la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

f est du type $u \times v$ avec $u(x) = -x^2 + x + 1$ et e^x d'où $u'(x) = -2x + 1$ et $v'(x) = e^x$
 $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = (-2x + 1)e^x + (-x^2 + x + 1)e^x = (-x^2 - x + 2)e^x$

- 2) Dresser le tableau de signes de la dérivée sur $\mathbb{R}$.

On étudie le signe de $-x^2 - x + 2$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 + 4 \times 2 = 9$ d'où
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 3}{-2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 3}{-2} = -2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- 3) En déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\square$	$f(-2)$	$f(1)$	$\square$	