Chapitre 1

Automatismes

I. proportion et pourcentage

1) Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes

Méthode

Enoncé :
On réalise un sondage auprès de 400 personnes concernant les mesures prises par le gouvernement.

1) 94 de ces 400 personnes ont affirmés être pleinement satisfaite des mesures prises par le gouvernement.
Déterminer la proportion de personnes pleinement satisfaite des mesures prises par le gouvernement, puis l'exprimer sous forme de pourcentage.

2) La proportion des personnes non satisfaites est $\dfrac{3}{8}$.
Combien de personnes ont affirmés ne pas être satisfaites des mesures prises par le gouvernement ?

Réponse :

1) Le nombre de personnes interrogés est $n_E = 400$. Parmi ceux-ci, le nombre de ceux satisfait est $n_S = 94$.
La proportion de personnes pleinement satisfaite des mesures prises par le gouvernement est $p = \dfrac{n_S}{n_E} = \dfrac{94}{400} = 0,235 = 23,5\%$.

2) Soit n_N le nombre de personnes non satisfaites.
On a $\dfrac{n_N}{n_E} = \dfrac{3}{8}$, soit $\dfrac{n_N}{400} = \dfrac{3}{8}$. On a donc $n_N = \dfrac{400 \times 3}{8} = 150$.
Il y a donc 150 personnes non satisfaites des mesures prises par le gouvernement.

2) Calculer la proportion d'une proportion

Méthode

Enoncé :
Un maraîcher vend des légumes en direct à la ferme et sur des marchés mais aussi dans des supermarchés locaux. Au cours du mois de Juin, il a vendu 78% de sa production en direct, et parmi ces légumes, 65% ont été vendu à la ferme.
Quelle proportion de sa production a été vendu directement à la ferme ?

Réponse :
La proportion p_1 de légumes vendus en direct est $p_1 = 0,78$
La proportion p_2 de légumes vendus à la ferme parmi ceux vendus en direct est $p_2 = 0,65$
On calcule : $p = p_1 \times p_2 = 0,78 \times 0,65 = 0,507 = 50,7\%$
La proportion de sa production vendu directement à la ferme a été de $50,7\%$

3) Passer du pourcentage d'évolution au coefficient multiplicateur

Méthode

Enoncé :
Le nombre de naissances dans un département français entre 2010 et 2019 a diminué de 12%

1) Par quel coefficient a été multiplié le nombre de naissances entre 2010 et 2019.

2) Le nombre d'habitants de ce département a, quant à lui, été multiplié par $1,03$.
A quel taux d'évolution du nombre d'habitants de ce département ce coefficient multiplicateur correspond-il ?

Réponse :

1) Le taux d'évolution du nombre de naissances est $t = -0,12$.
Diminuer une quantité de 12% signifie la multiplier par $c = 1 - \dfrac{12}{100} = 0,88$.
Par conséquent, le nombre de naissances dans ce département a été multiplié par $0,88$.

2) Le nombre d'habitants de ce département a, quant à lui, été multiplié par $c = 1,03$.
Le taux d'évolution associé à ce coefficient multiplicateur est :$t = c - 1 = 0,03$.
Ainsi le nombre d'habitants du département a augmenté de 3%

II. Evolutions et variations

1) Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale

Méthode

Enoncé :
En 2016, 88200 personnes ont visité un parc d'attractions

1) Ce nombre de visiteurs a augmenté de $12,5\%$ en 2017.
Quel a été le nombre de visiteurs en 2017.

2) Il y a eu 112500 visiteurs en 2018, puis une baisse de la fréquentation de 8% en 2019. Quel a été le nombre de visiteurs en 2019 ?

Réponse :

1) Augmenter une quantité de $12,5\%$ signifie la multipler par $c = 1 + \dfrac{12,5}{100} = 1,125$.
Or $88200 \times 1,125 = 99225$. Le nombre de visiteurs a été de 99225 personnes en 2017.

2) Diminuer une quantité de 8% signifie la multiplier par $c = 1 - \dfrac{8}{100} = 0,92$.
Or $112500 \times 0,92 = 103500$. Le nombre de visiteurs a été de 103500 personnes en 2019.

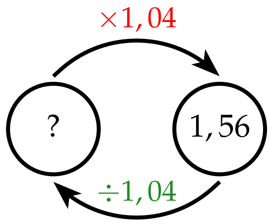
2) Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur initiale

Méthode

Enoncé :
Le prix du ticket de métro d'une grande ville augmente de 4% au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020.
Le ticket de métro au tarif réduit coûte $1,56$ € après son augmentation.
Combien coûtait-il avant l'augmentation ?

Réponse :

Augmenter une quantité de 4% revient à la multiplier par $1,04$.
Diviser par $1,04$ permet de compenser une multiplication par $1,04$.
Le ticket de métro au tarif réduit coûte $1,56$ €. Donc son prix avant augmentation est donné par le quotient $\dfrac{1,56}{1,04}$.
Or $\dfrac{1,56}{1,04} = 1,5$. Ainsi le ticket de métro valait $1,50$ € avant le 1er janvier 2020.



3) Calculer un taux d'évolution et l'exprimer en pourcentage

Méthode

Enoncé :

Le prix d'un kilogramme d'abricots passe de $2,50$ € à $1,80$ € en début de saison.

1) Déterminer le pourcentage d'évolution du prix du kilogramme d'abricots en début de saison.

2) En fin de saison, le prix d'un kilogramme passe de $1,80$ € à $2,61$ €.
Déterminer le pourcentage d'augmentation du prix d'un kilogramme d'abricots en fin de saison

Réponse :

1) On a $Q_1 = 2,50$ et $Q_2 = 1,80$. Le taux d'évolution t de la valeur Q_1 à la valeur Q_2 est :
$t = \dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \dfrac{1,80 - 2,50}{2,50} = \dfrac{-0,70}{2,50} = -0,28 = -28\%$.
Le prix du kilogramme d'abricots a diminué de 28% en début de saison.

2) On a $Q_1 = 1,81$ et $Q_2 = 2,61$. Le taux d'évolution t correspondant est :
$t = \dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \dfrac{2,61 - 1,80}{1,80} = \dfrac{0,60}{1,80} = 0,45 = 45\%$.
Le prix du kilogramme d'abricots a augmenté de 45% en fin de saison.

4) Calculer le taux d'évolution de plusieurs évolutions successives

Méthode

Enoncé :

Le cours d'une action au 1er février 2020 a augmenter de 12% par rapport à son cours au 1er janvier 2020. Il augmente ensuite de 8% entre le 1er février 2020 et le 1er mars 2020.

1) Déterminer le taux d'évolution global du cours de cette action entre le 1er janvier et le 1er mars 2020.

2) Le cours de cette action diminue ensuite entre le 1er mars et le 1er avril 2020 de 25%, puis augmente de 14% entre le 1er avril et le 1er mai. Déterminer le pourcentage d'évolution du cours de l'action entre le 1er février et le 1er mai 2020.

Réponse :

1) Augmenter une quantité de 12% revient à la multiplier par $1 + \dfrac{12}{100}$, soit $1,12$.
Le coefficient multiplicateur global pour ces deux évolutions successives est donc $c = 1,12 \times 1,08 = 1,2096$. Le taux d'évolution global du cours de l'action est donc $1,2096 - 1$, soit $0,2096$. Ainsi le pourcentage d'augmentation de ce cours est $20,96\%$.

2) Entre le 1er février et le 1er mai, il y a trois évolutions successives de coefficients multiplicateurs $1,08$, $1-0,25 = 0,75$ et $1+0,14 = 1,14$. Le coefficient multiplicateur global pour ces trois évolutions successives est donc $c' = 1,08 \times 0,75 \times 1,14 = 0,9234$.

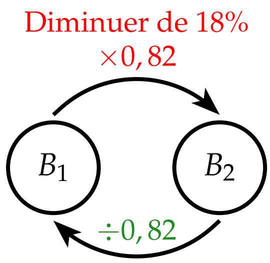
$c' - 1 = -0,0766$, donc le cours de cette action a diminué de $7,66\%$ entre le 1er février et le 1er mai 2020.

5) Calculer un taux d'évolution réciproque

Méthode

Enoncé :
La population de bouquetins dans un parc national a diminué en 2019 de 18%.
Déterminer, à $0,1\%$ près, le pourcentage d'augmentation nécessaire de cette population en 2020 afin que la population de bouquetins retrouve son niveau initial.

Réponse :
Diminuer une quantité de 18% revient à la multiplier par $c = 1 - 0,18 = 0,82$. Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est c' tel que $c \times c' = 1$, soit $c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,82}$ et $c' \approx 1,22$
Soit t' le taux d'augmentation cherché. Alors $t' = c' - 1$; donc $t' \approx 0,22$.
On en déduit que le pourcentage d'augmentation de cette population doit être de 22%, à $0,1\%$ près, pour revenir au niveau initial de 2018.



III. Développer et factoriser

1) Développer

Définition

Développer une expression consiste à transformer un **produit** en une **somme** (ou une différence).

Propriété

Distributivité et double distributivité
Pour tous nombres réels k, a, b, c et d on a :

$$k \times (a+b) = ka + kb$$
$$(a+b)(c+d) =$$

Méthode

Quand une parenthèse est précédée d'un signe moins, on développe en multipliant par -1, c'est à dire que l'on change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse. Sinon on ne change rien.

Exemple :
Simplifier : $A = (-6x-4) - (5x-4) = -6x - 4 - 5x + 4 = -11x$
Développer :
$B = (4x-5)(7-3x) = 4x \times 7 + 4x \times (-3x) - 5 \times 7 - 5 \times (-3x) = 28x - 12x^2 - 35 + 15x$
$B = -12x^2 + 43x - 35$

2) Factoriser

Définition

Factoriser, c'est transformer une **somme (ou une différence)** en un **produit**.

Méthode - Factoriser

$A = (2x+3)(4x+1) - (2x+3)(x+2)$

1) Repérer le facteur commun
Le facteur commun est $(2x+3)$. On peut le souligner dans l'expression de départ.

$A = (2x+3)[......$

2) L'écrire devant et <u>ouvrir un crochet</u>

$A = (2x+3)[(4x+1) - (x+2)]$

3) Dans le crochet,on met tout ce qui n'est pas le facteur commun (tout ce qui n'est pas souligné).

Exemple : Factoriser $B = (x-1)(3x+4) - (x-1)(x+3)$
$B = (x-1)\left[(3x+4) - (x+3)\right] = (x-1)(3x+4-x-3) = (x-1)(2x+1)$

3) Identités remarquable

Propriété

Identités remarquables :
Pour tous nombres réels a et b on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple : Factoriser les expressions P et Q ci-dessous.

$P = (x-3)^2 - 49$
$P = (x-3)^2 - 7^2$ $P = (x-3-7)(x-3+7)$
$P = (x-10)(x+4)$

$Q = 4x^2 - 12x + 9$
$Q = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$
$Q = (2x-3)^2$

IV. Calculs avec des fractions

1) Ajouter ou soustraire des fractions

Méthode

Pour ajouter ou soustraire des fractions, on les met sous le même dénominateur.
On multiplie le numérateur de la 1ère fraction par le dénominateur de la 2nde.
De la même manière, on multiplie le numérateur de la 2nde par le numérateur de la 1ère.
Le tout se met sous le même dénominateur : le produit des 2 dénominateurs.

Exemple : $\frac{1-3x}{x+4} - \frac{1+x}{x+2} = \frac{(1-3x)\times(x+2)-(1+x)\times(x+4)}{(x+4)(x+2)}$

$$= \frac{x+2-3x^2-3\times 2-(x+4+x^2+4x)}{(x+4)(x+2)}$$

$$= \frac{x+2-3x^2-6-5x-4-x^2}{(x+4)(x+2)}$$

$$= \frac{-4x-10-4x^2}{(x+4)(x+2)}$$

2) Multiplier ou diviser des fractions

Méthode

Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.
Pour diviser des fractions, on multiplie par l'inverse.

Exemple : Simplifier les expressions A et B ci-dessous.

$A = \frac{x-3}{3} \times \frac{6}{5}$

$A = \frac{(x-3)\times 6}{3\times 5}$

$A = \frac{2(x-3)}{5}$

$B = \frac{2}{x-5} \div \frac{2}{x+3}$

$B = \frac{2}{x-5} \times \frac{x+3}{2}$

$B = \frac{2\times(x+3)}{(x-5)\times 2}$

$B = \frac{x+3}{x-5}$

V. Résolution d'équations

1) Equation à produit nul

Propriété

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Méthode - Se ramener à une équation produit nul

- On écrit tous les termes à gauche de l'équation
- On FACTORISE → soit grâce à un facteur commun
  → soit grâce à un identité remarquable
- On applique le produit nul.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-1)^2-25=0$

$(2x-1)^2-25=0 \iff (2x-1)^2-5^2=0$

$\iff (2x-1-5)(2x-1+5)=0$

$\iff (2x-6)(2x+4)=0$

EPN : Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

$\iff (2x-6)=0$ ou $(2x+4)=0$

$\iff 2x=6$ ou $2x=-4$

$$\iff x = 3 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \{-2\,;\,3\}$$

2) Equations du type $x^2 = a$

Méthode

Les solutions de l'équation sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$ si a est positif.
Il n'y a pas de solutions si a est négatif (un carré est toujours positif).

Exemple : $x^2 = 7$

$$S = \left\{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\right\}$$

VI. Puissances

Définition

Pour tout nombre réel a et pour tout entier naturel n, on a :

$a^0 = 1$ $\qquad a^1 = a$ $\qquad a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ (n termes) $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemple :

$3^0 = 1$ $\qquad (-5)^1 = -5$ $\qquad (-7)^0 = 1$ $\qquad 7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$ $\qquad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Propriétés

Si les nombres élevés à la puissance sont les mêmes : (ici a)

$a^{n+m} = a^n \times a^m$ $\qquad a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$ $\qquad (a^n)^m = a^{n \times m}$

Exemple :

$7^5 \times 7^9 = 7^{5+9} = 7^{14}$

$5^3 \times 5^2 \times 5^{-5} = 5^{3+2-5} = 3^0 = 1$

$\dfrac{6^8}{6^7} = 6^{8-7} = 6^1 = 6$

$\left(3^{-4}\right)^5 = 3^{-4\times5} = 3^{-20}$

Propriétés

Si les puissances sont les mêmes : (ici n)

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ $\qquad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemple :

$7^5 \times 4^5 = (7 \times 5)^5 = 35^5$

$\dfrac{6^8}{4^8} = \left(\dfrac{6}{8}\right)^8 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^8$

Remarques

- Si les nombres élevés à la puissance sont différents et si les puissances sont différentes, il nexiste pas de règle de calcul :

  $7^5 \times 4^3 = ??$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{5^8}{4^5} = ??$

- Il n'y a pas de règle pour additionner ou soustraire des puissances : il faut factoriser :
  $2^{31} - 2^{30} = 2^{30+1} - 2^{30} = 2 \times 2^{30} - 1 \times 2^{30} = 2^{30}(2-1) = 2^{30}$

Puissances et écriture scientifique

Définition

En notation scientifique, un nombre s'écrit sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal supérieur ou égal à 1 et strictement inférieur à 10, et n est un entier relatif.

Exemple : Ecrire en notation scientifique :

1) $546,7 \times 10^9 = 5,467 \times 10^{11}$

2) $0,045 \times 10^{-3} = 4,5 \times 10^{-5}$