

Chapitre 02 - Trigonométrie

Correction des exercices obligatoires

Exercice 1 - enroulement autour du cercle trigo

En utilisant la figure ci-dessous, donner les points du cercle qui correspondent aux angles suivants. On décomposera la décomposition du nombre en donnant la mesure principale de l'angle.

1) $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$. $\frac{5\pi}{6}$ est donc la mesure principale. Il s'agit du point F.

2) $\frac{15\pi}{4}$

$\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$ est la mesure principale. Il s'agit du point M.

3) $-\frac{132\pi}{3}$

$3 \times 2 = 6$ $-\frac{132\pi}{3} = \frac{-6 \times 22\pi}{3} + 0\pi$. 0 est la mesure principale. Il s'agit du point I.

4) $\frac{35\pi}{2}$

$2 \times 2 = 4$ $\frac{35\pi}{2} = \frac{36\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 18\pi - \frac{\pi}{4}$ est la mesure principale. Il s'agit du point B.

5) $-\frac{55\pi}{6}$

$6 \times 2 = 12$ $-\frac{55\pi}{6} = \frac{-5 \times 12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = -10\pi + \frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale. Il s'agit du point F.

6) $-\frac{35\pi}{4}$

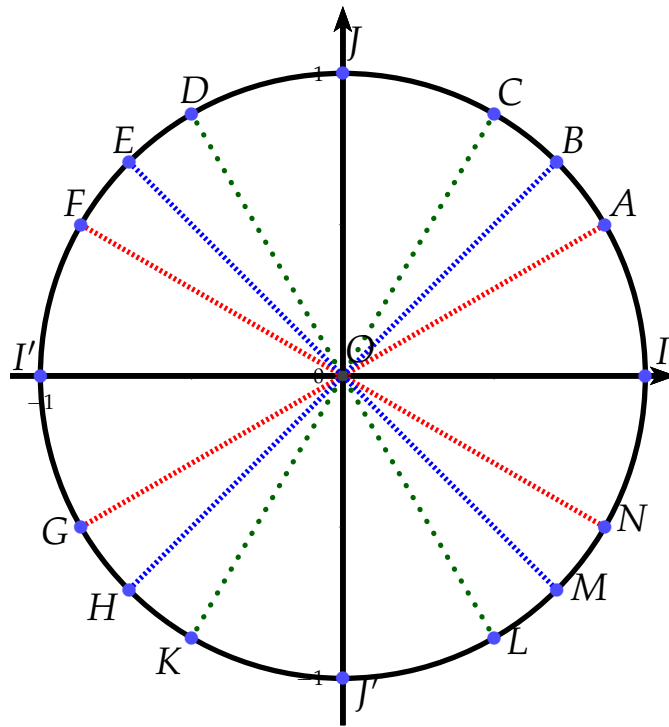
$2 \times 4 = 8$ $-\frac{35\pi}{4} = \frac{-8 \times 4\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -8\pi - \frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale. Il s'agit du point H.

7) $\frac{26\pi}{3}$

$3 \times 2 = 6$ $\frac{26\pi}{3} = \frac{6 \times 4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 8\pi + \frac{2\pi}{3}$ est la mesure principale. Il s'agit du point D.

8) $-\frac{1883\pi}{2}$

$2 \times 2 = 4$ $-\frac{1883\pi}{2} = \frac{-471 \times 4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -942\pi + \frac{\pi}{2}$ est la mesure principale. Il s'agit du point J.

**Exercice 2**

En utilisant la figure de l'exercice 1, donner trois réels (dont au moins un positif et un négatif) associés à chacun des points suivants lors de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique : C ; E ; K et J.

- C : $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}; \frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}$
- E : $\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} - 2\pi = \frac{-5\pi}{4}$
- K : $\frac{-2\pi}{3}; \frac{-2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}; \frac{-2\pi}{3} - 2\pi = \frac{-8\pi}{3}$
- J : $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{-3\pi}{2}$

Exercice 3 - même point image

Pour chacun des nombres suivants, déterminer deux autres réels ayant le même point image lors de l'enroulement de la droite numérique

1) $\frac{3\pi}{4}$

$$\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} - 2\pi = \frac{-5\pi}{4}$$

2) $\frac{5\pi}{7}$

$$\frac{5\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} + 2\pi = \frac{19\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} - 2\pi = \frac{-9\pi}{7}$$

3) $-\frac{2\pi}{5}$

$$-\frac{2\pi}{5}; -\frac{2\pi}{5} + 2\pi = \frac{8\pi}{5}; -\frac{2\pi}{5} - 2\pi = \frac{-12\pi}{5}$$

4) $\frac{7\pi}{9}$

$$\frac{7\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} + 2\pi = \frac{25\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} - 2\pi = -\frac{11\pi}{9}$$

5) $\frac{4\pi}{3}$

$$\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$$

Exercice 4 - convertir en degrés

Pour chacun des angles suivants, convertir l'angle en degré. On arrondira si nécessaire à 1 chiffre après la virgule

1) $\frac{3\pi}{5}$ rad

2) $\frac{5\pi}{7}$ rad

3) $\frac{4\pi}{3}$ rad

4) $\frac{3\pi}{2}$ rad

5) $\frac{7\pi}{4}$ rad

6) $\frac{5\pi}{6}$ rad

rad	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
deg	$\frac{3\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 68$	$\frac{5\pi}{7} \times \frac{180}{\pi} = 128$	240	270	315	150

Exercice 5 - convertir en radians

Pour chacun des angles suivants, convertir l'angle en radian. On donnera la valeur exacte.

1) 35°

2) 260°

3) 70°

4) 195°

5) 225°

6) 54°

deg	35	260	70	195	225	54
rad	$35 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$	$\frac{13\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$

Exercice 6

Dans chacune des listes suivantes, il y a un intrus. Le trouver en justifiant.

1) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \frac{-\pi}{2}; \frac{-5\pi}{2}$.

Pour trouver l'intrus, on cherche la mesure principale de l'angle.

$$\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} ; \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} ; \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} ; \frac{-5\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2}. \text{ L'intrus est } \frac{9\pi}{2}$$

2) $\frac{\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}; \frac{-8\pi}{6}; \frac{-10\pi}{3}$.

$$\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} ; \frac{14\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} ; \frac{-8\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} ; \frac{-10\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3}. \text{ L'intrus est } \frac{\pi}{3}$$

3) $\frac{7\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{-9\pi}{4}; \frac{-19\pi}{4}$.

$$\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} ; \frac{-\pi}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} ; \frac{-9\pi}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} ; \frac{-19\pi}{4} \Rightarrow \frac{-3\pi}{4}. \text{ L'intrus est } \frac{-19\pi}{4}$$

4) $\pi; -\pi; \pi\sqrt{9}; 0$.

$$\pi \Rightarrow \pi ; -\pi \Rightarrow \pi ; \pi\sqrt{9} = 3\pi \Rightarrow \pi ; 0 \Rightarrow 0. \text{ L'intrus est } 0$$

Exercice 7 - cosinus et sinus

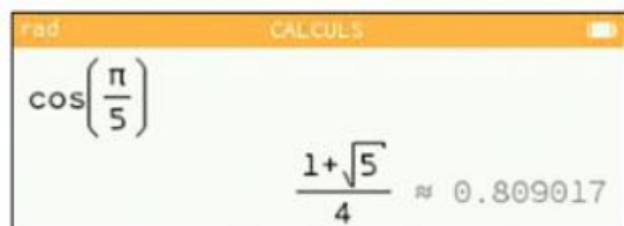
En utilisant le cercle trigonométrique de l'exercice 1, recopier et compléter le tableau suivant :

x	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{2}$	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{25\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{2}$
Point image								
$\cos(x)$								
$\sin(x)$								

x	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{2}$	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{25\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{2}$
mes. princ.	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$
point image	M	C	N	J	B	C	A	J'
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin(x)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

Exercice 8

Une saisie calculatrice donne :



En admettant que cette réponse est correcte, en déduire la valeur exacte de chacun des nombres suivants.

1) $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

Pour cet exercice, on fait « *comme si* », on rajoutait 1 valeur dans le tableau des valeurs particulières

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{6\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + \frac{5\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + \pi \text{ donc } \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ car } \cos(-x) = \cos(x) \text{ donc}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

3) $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 \text{ donc}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} = \frac{16}{16} - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

$$\text{D'où : } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

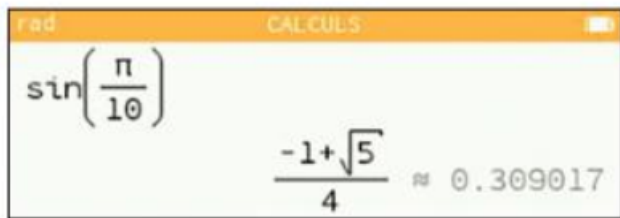
$$4) \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\frac{3\pi}{10} = -\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \text{ d'où } \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

car $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exercice 9

Une saisie calculatrice donne :



En admettant que cette réponse est correcte, en déduire la valeur exacte de chacun des nombres suivants.

$$1) \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ car } \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 \text{ d'où}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{16}{16} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

$$\text{donc } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$3) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \text{ d'où } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ car } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$4) \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

$$\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10} \text{ donc } \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ car } \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Exercice 10

Sans calculatrice, calculer et réduire au même dénominateur les expressions suivantes. On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires.

1) $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{-7\pi}{4} \text{ a comme mesure principale } \frac{\pi}{4} \text{ donc } \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

2) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

$$\frac{5\pi}{3} \text{ a comme mesure principale } -\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \sin(2\pi) = \sin(0) = 0$$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(0) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

3) $\cos(-2018\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos(-2018\pi) = \cos(0)$$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ a comme mesure principale } -\frac{\pi}{2} \text{ donc } \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(-2018\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$\frac{4\pi}{3}$ a comme mesure principale $-\frac{2\pi}{3}$

$$-\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \pi \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 11

Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes. On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires s'il y en a.

1) $\cos^2\left(\frac{-\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{-\pi}{13}\right)$

$$\cos^2\left(\frac{-\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{-\pi}{13}\right) = 1 \quad \text{car} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2) $\cos^2\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

$$\cos^2\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3) $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(-\pi)$

$$-\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \pi \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{et} \quad \cos(-\pi) = \cos(\pi)$$

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{donc} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(-\pi) &= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) - \cos(\pi) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$$