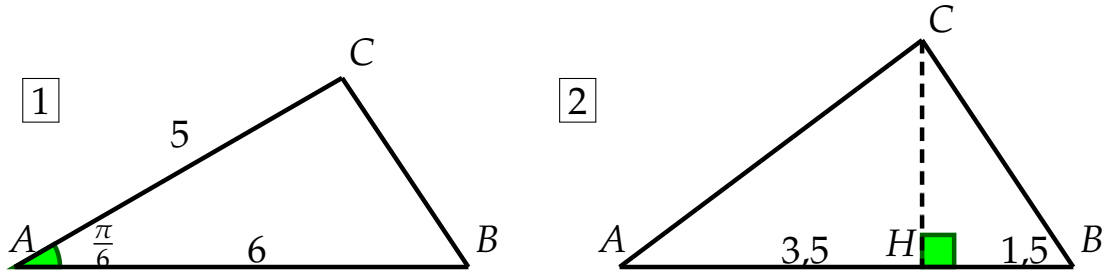


Chap. 04 - Produit scalaire

Correction - Exercices facultatifs

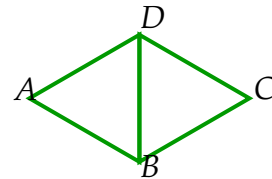
Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ à l'aide des informations données.



- 1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$
- 2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH = 5 \times 3,5 = 17,5$

Exercice 2 ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux de côté 6. Calculer les produits scalaires suivants.

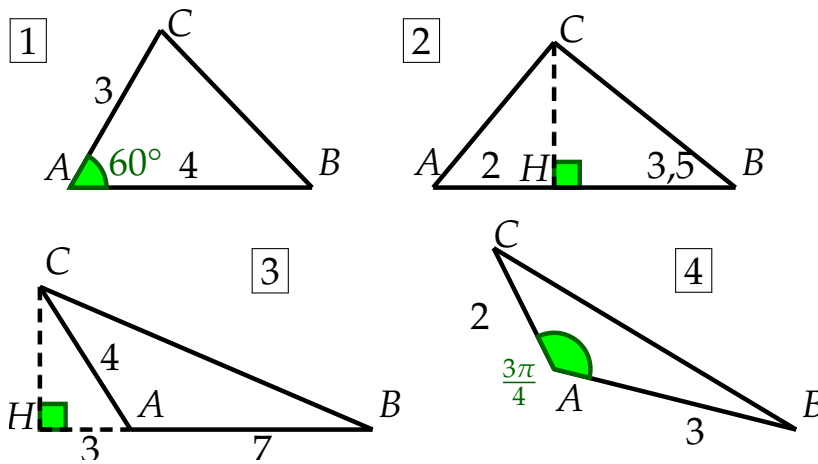
- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{CD} \cdot \vec{CB}$ | 4) $\vec{DB} \cdot \vec{AC}$ |
| 2) $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$ | 5) $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ |
| 3) $\vec{DB} \cdot \vec{CB}$ | 6) $\vec{CA} \cdot \vec{BC}$ |



- 1) $\vec{CD} \cdot \vec{CB} = \vec{CD} \cdot \frac{1}{2}\vec{CD} = \frac{1}{2} \times CD \times CD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$
- 2) $\vec{DA} \cdot \vec{DC} = \vec{DA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{DA}\right) = -\frac{1}{2} \times DC \times DC = -\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = -18$
- 3) $\vec{DB} \cdot \vec{CB} = \vec{DB} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{DB}\right) = \frac{1}{2}DB \times DB = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$
- 4) $\vec{DB} \cdot \vec{AC} = 0$ car \vec{DB} et \vec{AC} sont orthogonaux (les diagonales d'un losange se coupent \perp).
- 5) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{BA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AB} = -AB \times AB = -6 \times 6 = -36$
- 6) $\vec{CA} \cdot \vec{BC} = \vec{CA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{CA}\right) = -\frac{1}{2}CA \times CA = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{27} \times 2\sqrt{27} = -54$

La moitié de la longueur CA se calcule à l'aide de Pythagore dans le triangle ADB coupé en 2 par la diagonale du losange.

Exercice 3 Dans chaque cas, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



- 1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 3 \times \cos(60) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$
- 2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH = 5,5 \times 2 = 11$
- 3) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = -AB \times AH = -7 \times 3 = -21$
- 4) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$

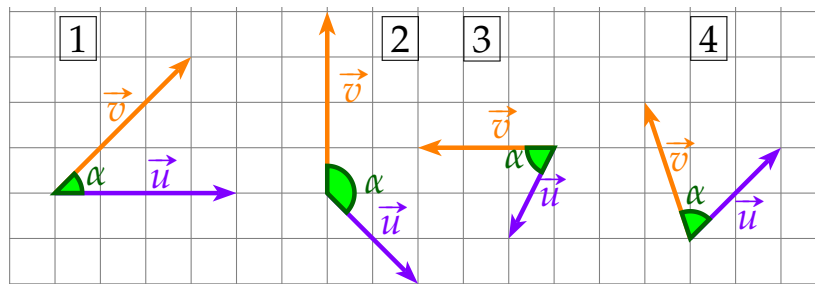
Exercice 4

1) Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

a) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2) En déduire la valeur de l'angle géométrique α .



- 1) a) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$;
 b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 = 12$.
 c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$
 $\iff 12 = 4 \times \sqrt{18} \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{12}{4\sqrt{18}} \iff \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
- 2) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = 4$;
 b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8$.
 c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$
 $\iff -8 = \sqrt{8} \times 4 \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{-8}{4\sqrt{8}} \iff \alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$
- 3) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = 3$;
 b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 = 3$.
 c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$
 $\iff 3 = \sqrt{5} \times 3 \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{3}{3\sqrt{5}} \iff \alpha \approx 63,43^\circ$
- 4) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4.$$

$$\text{c) } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

$$\iff 4 = \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{4}{4\sqrt{5}} \iff \alpha \approx 63,43^\circ$$

Exercice 5 calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chaque cas.

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-1) \times 5 = 3$$

$$2) \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + (-3) \times \frac{1}{3} = -\frac{7}{8}$$

$$3) \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$$

Exercice 6 $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan. calculer les produits scalaires suivants.

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-3) \times (-1) = 4$$

$$2) \vec{u} \cdot (-4\vec{v}) = -4\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 4 = -16$$

$$3) -\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = -2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8$$

$$4) (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \sqrt{1^2 + (-3)^2}^2 - \sqrt{1^2 + (-1)^2}^2 = 10 - 2 = 8$$

Exercice 7 $A(-2;5)$, $B(4;3)$ et $C(1;-6)$ sont trois points du plan.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{BA} et \vec{BC} .

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ -6 - 3 \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2) Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-6) \times (-3) + 2 \times (-9) = 18 - 18 = 0$$

3) En déduire la nature du triangle ABC.

Comme $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$, cela signifie que les vecteurs \vec{BA} et \vec{BC} sont orthogonaux et que donc $\widehat{ABC} = 90^\circ$. ABC est donc un triangle rectangle en B

Exercice 8 On donne $A(2;-1)$, $B(0;1)$ et $C(1;-2)$.

1) Calculer AB et AC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{2}$$

2) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ -2 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -2 \times (-1) + 2 \times (-1) = 0\end{aligned}$$

3) Calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$

Exercice 9 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4)$, $B(6;3)$ et $C(-4;-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes pour déterminer une mesure en degré de l'angle \widehat{BAC} .

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{37} \\ AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{52} \\ \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6-0 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4-0 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 6 \times (-4) + (-1) \times (-6) = 18 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC}) \\ \Leftrightarrow 18 &= \sqrt{37} \times \sqrt{52} \times \cos(\widehat{ABC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{ABC}) = \frac{18}{\sqrt{37}\sqrt{52}} \Leftrightarrow \widehat{ABC} \approx 65,77^\circ\end{aligned}$$

Exercice 10 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $M(2;-2)$, $N(-3;1)$ et $P(1;2)$

1) Calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} &= \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} &= \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} &= (-5) \times (-1) + 3 \times 4 = 17\end{aligned}$$

2) En déduire une valeur exacte de l'angle \widehat{PMN} .

$$\begin{aligned}MN &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34} \\ MP &= \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} &= MN \times MP \times \cos(\widehat{PMN}) \\ \Leftrightarrow 17 &= \sqrt{34} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{PMN}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{PMN}) = \frac{17}{\sqrt{34}\sqrt{17}} \Leftrightarrow \widehat{PMN} \approx 63,26^\circ\end{aligned}$$

Exercice 11 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1;1)$, $B\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right)$ et $C(5;1)$.

1) Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 1 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\frac{9}{5} \times 4 + \frac{12}{5} \times 0 = -\frac{36}{5}\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 5 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{11}{5} \times (-4) + \frac{12}{5} \times 0 = \frac{44}{5}$$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{9}{5} \times \frac{11}{5} + \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} = \frac{45}{5}$$

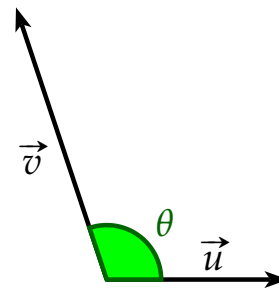
2) Le triangle ABC est-il rectangle ?

Le triangle n'est pas rectangle car d'après les produits scalaires, nous n'avons de vecteurs orthogonaux, donc pas d'angles droits.

Exercice 12

On considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} représentés ci-contre.

On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Calculer les éléments suivants.



- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- 2) $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$
- 3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$
- 2) $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 3 \times (-3) - 6 \times 3^2 = -63$
- 3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 2 \times (-3) + 3^2 = 7$