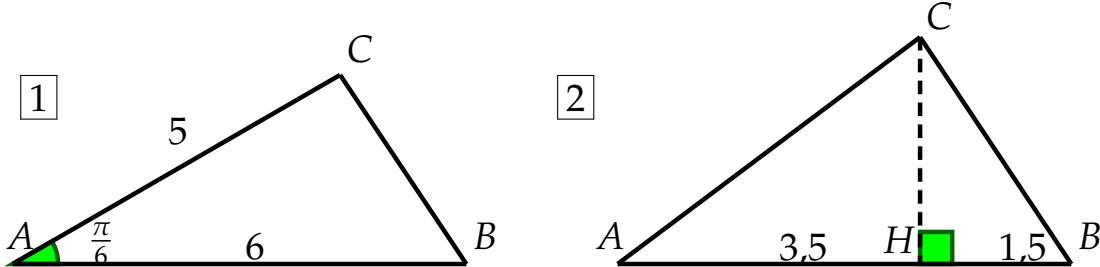


Chap. 04 - Produit scalaire Correction - Exercices facultatifs

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide des informations données.



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5 \times 3,5 = 17,5$

Exercice 2 ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux de côté 6. Calculer les produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$

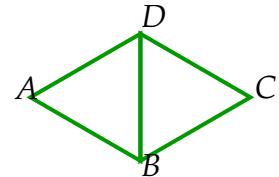
4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$

5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB}$

6) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$



1) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \times CD \times CD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

2) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{1}{2} \times DC \times DC = -\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = -18$

3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2}DB \times DB = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

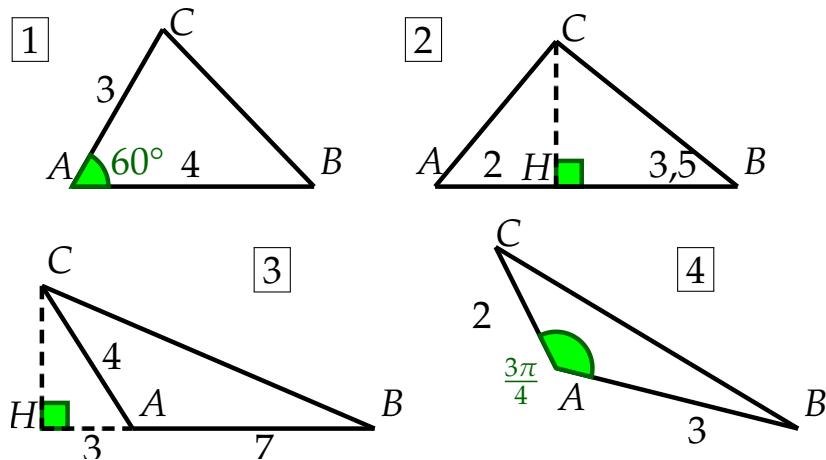
4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux (les diagonales d'un losange se coupent \perp).

5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB \times AB = -6 \times 6 = -36$

6) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) = -\frac{1}{2}CA \times CA = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{27} \times 2\sqrt{27} = -54$

La moitié de la longueur CA se calcule à l'aide de Pythagore dans le triangle ADB coupé en 2 par la diagonale du losange.

Exercice 3 Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 3 \times \cos(60) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5,5 \times 2 = 11$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -7 \times 3 = -21$

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$

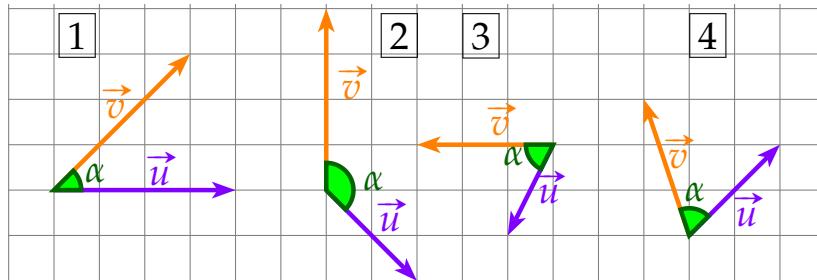
Exercice 4

1) Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

a) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2) En déduire la valeur de l'angle géométrique α .



1) a) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 = 12$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$$\iff 12 = 4 \times \sqrt{18} \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{12}{4\sqrt{18}} \iff \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

2) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = 4$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$$\iff -8 = \sqrt{8} \times 4 \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{-8}{4\sqrt{8}} \iff \alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

3) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = 3$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 = 3$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$$\iff 3 = \sqrt{5} \times 3 \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{3}{3\sqrt{5}} \iff \alpha \approx 63,43^\circ$$

4) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

$$\iff 4 = \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{4}{4\sqrt{5}} \iff \alpha \approx 63,43^\circ$$

Exercice 5 calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chaque cas.

1) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-1) \times 5 = 3$$

2) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + (-3) \times \frac{1}{3} = -\frac{7}{8}$$

3) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$$

Exercice 6 $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan. calculer les produits scalaires suivants.

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-3) \times (-1) = 4$

2) $\vec{u} \cdot (-4\vec{v}) = -4\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 4 = -16$

3) $-\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = -2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8$

4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \sqrt{1^2 + (-3)^2} - \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 10 - 2 = 8$

Exercice 7 $A(-2;5)$, $B(4;3)$ et $C(1;-6)$ sont trois points du plan.

1) Determiner les coordonnées des vecteurs \vec{BA} et \vec{BC} .

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ -6 - 3 \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2) Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-6) \times (-3) + 2 \times (-9) = 18 - 18 = 0$$

3) En déduire la nature du triangle ABC .

Comme $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$, cela signifie que les vecteurs \vec{BA} et \vec{BC} sont orthogonaux et que donc $\widehat{ABC} = 90^\circ$. ABC est donc un triangle rectangle en B

Exercice 8 On donne $A(2;-1)$, $B(0;1)$ et $C(1;-2)$.

1) Calculer AB et AC .

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{2}$$

2) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ -2 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -2 \times (-1) + 2 \times (-1) = 0\end{aligned}$$

- 3) Calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$

Exercice 9 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0; 4)$, $B(6; 3)$ et $C(-4; -2)$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes pour déterminer une mesure en degré de l'angle \widehat{BAC} .

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{37} \\ AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{52} \\ \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 - 0 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 - 0 \\ -2 - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 6 \times (-4) + (-1) \times (-6) = 18 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC}) \\ \iff 18 &= \sqrt{37} \times \sqrt{52} \times \cos(\widehat{ABC}) \iff \cos(\widehat{ABC}) = \frac{18}{\sqrt{37} \sqrt{52}} \iff \widehat{ABC} \approx 65,77^\circ\end{aligned}$$

Exercice 10 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $M(2; -2)$, $N(-3; 1)$ et $P(1; 2)$

- 1) Calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} &= \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} &= \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} &= (-5) \times (-1) + 3 \times 4 = 17\end{aligned}$$

- 2) En déduire une valeur exacte de l'angle \widehat{PMN} .

$$\begin{aligned}MN &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34} \\ MP &= \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} &= MN \times MP \times \cos(\widehat{PMN}) \\ \iff 17 &= \sqrt{34} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{PMN}) \iff \cos(\widehat{PMN}) = \frac{17}{\sqrt{34} \sqrt{17}} \iff \widehat{PMN} \approx 63,26^\circ\end{aligned}$$

Exercice 11 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 1)$, $B\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right)$ et $C(5; 1)$.

- 1) Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 1 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} & \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\frac{9}{5} \times 4 + \frac{12}{5} \times 0 = \frac{36}{5}\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 5 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{11}{5} \times (-4) + \frac{12}{5} \times 0 = \frac{44}{5}$$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{9}{5} \times \frac{11}{5} + \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} = \frac{45}{5}$$

2) Le triangle ABC est-il rectangle?

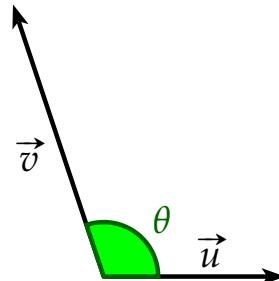
Le triangle n'est pas rectangle car d'après les produits scalaires, nous n'avons de vecteurs orthogonaux, donc pas d'angles droits.

Exercice 12

On considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} représentés ci-dessous.

On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Calculer les éléments suivants.

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- 2) $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$
- 3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$



- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$
- 2) $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 3 \times (-3) - 6 \times 3^2 = -63$
- 3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 2 \times (-3) + 3^2 = 7$