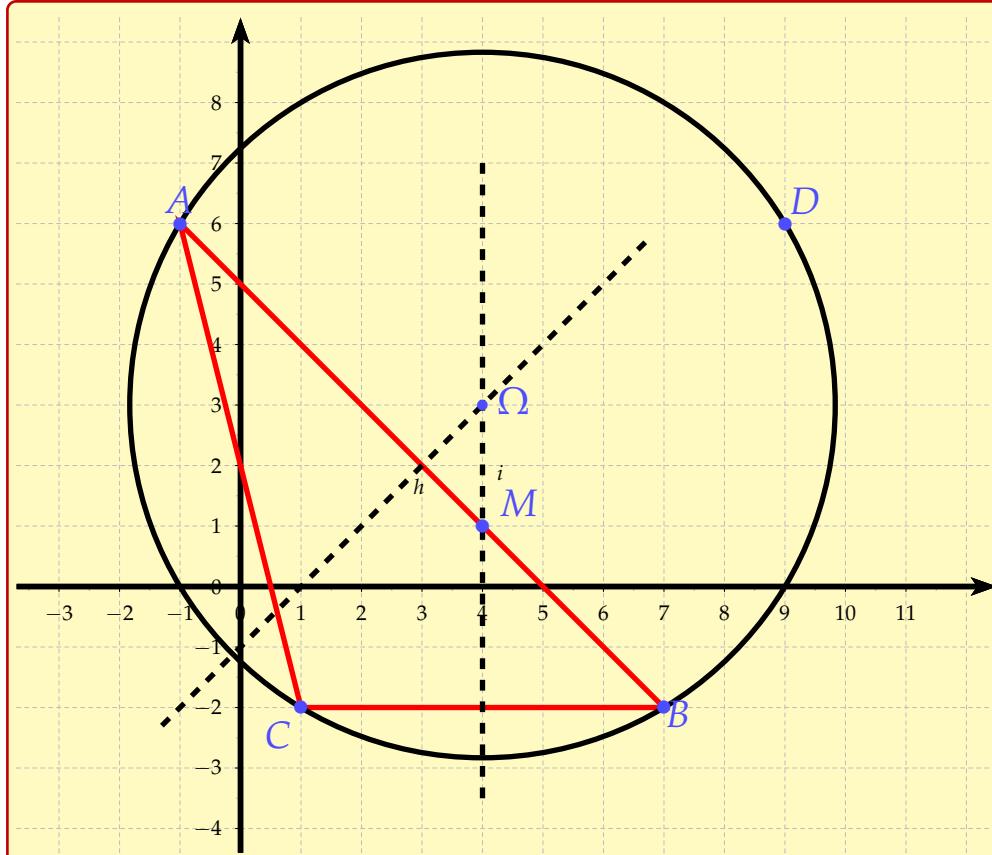


## Correction - Exercices Vecteurs Rappels seconde

### Exercice 1 - Nature d'un quadrilatère et droites remarquables

On considère un repère orthonormé  $(O; I, J)$  du plan. On donne les points  $A(-1; 6)$ ,  $B(7; -2)$ ,  $C(1; -2)$  et  $D(9; 6)$ .

- 1) Faire une figure.



- 2) Construire le centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'intersection de ses médiatrices. En traçant les médiatrices du triangle  $ABC$ , on peut donc construire le point  $\Omega$ .

- 3) Donner, sans justification, les coordonnées de  $\Omega$  et calculer le rayon du cercle.

Par lecture graphique, le centre  $\Omega$  a pour coordonnées  $(4; 3)$ .

$$\Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2} = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{34}$$

donc le rayon de ce cercle est  $r = \Omega A = \sqrt{34}$

- 4) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle : on dira qu'ils sont cocycliques.

Pour montrer que les points  $B, C$  et  $D$  appartiennent au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r = \sqrt{34}$  on va montrer que ces trois points sont tous à une distance  $r$  de  $\Omega$ . Le repère étant orthonormé, on peut utiliser la formule de calcul des distances :

$$\Omega B = \sqrt{(x_B - x_\Omega)^2 + (y_B - y_\Omega)^2} = \sqrt{(7 - 4)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Omega C = \sqrt{(x_C - x_\Omega)^2 + (y_C - y_\Omega)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{34} \text{ et}$$

$$\Omega D = \sqrt{(x_D - x_\Omega)^2 + (y_D - y_\Omega)^2} = \sqrt{(9 - 4)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{34}$$

Par conséquent,  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{34}$  donc les points,  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent tous au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  : ils sont cocycliques.

- 5) Soit  $M$ , un point de coordonnées  $(4; 1)$ .

- a) Montrer que  $M$  appartient au segment  $[AB]$ .

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser la formule de calcul des distances :

$$AM = \sqrt{(4 + 1)^2 + (1 - 6)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$MB = \sqrt{(7 - 4)^2 + (-2 - 1)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(7 + 1)^2 + (-2 - 6)^2} = 8\sqrt{2}$$

donc  $AM + MB = AB$  et donc le point  $M$  appartient au segment  $[AB]$ .

- b) Montrer que  $M$  appartient au segment  $[DC]$ .

De même, on a :

$$DM = \sqrt{(4 - 9)^2 + (1 - 6)^2} = 5\sqrt{2};$$

$$MC = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-2 - 1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ et}$$

$$DC = \sqrt{(1 - 9)^2 + (-2 - 6)^2} = 8\sqrt{2}$$

donc  $DM + MC = DC$  et donc le point  $M$  appartient au segment  $[DC]$

- c) Calculer  $MA \times MB$  et  $MC \times MD$ .

$$MA \times MB = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30 \text{ et}$$

$$MC \times MD = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$$

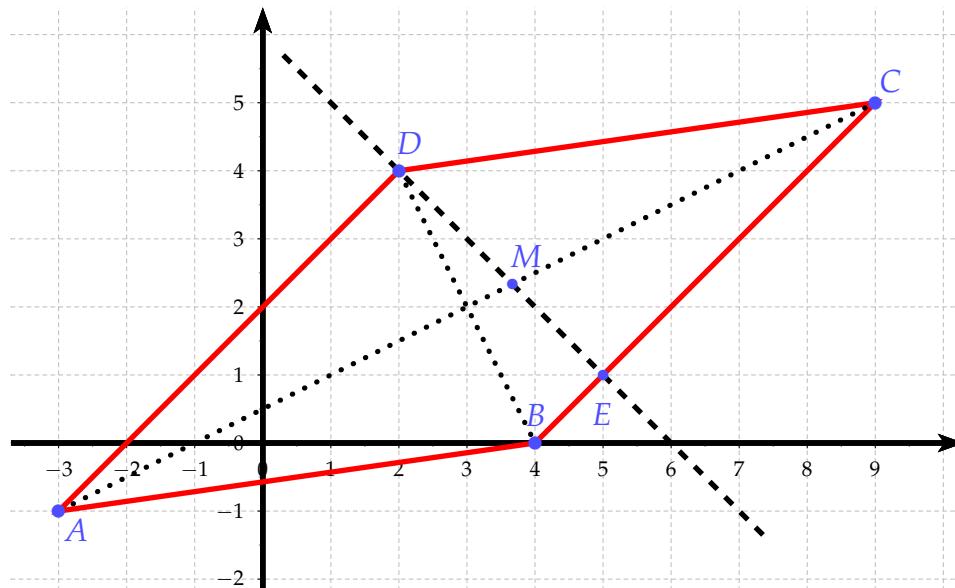
- d) Conclure

D'après les questions précédentes, on peut conclure que  $MA \times MB = MC \times MD$

## Exercice 2 - Nature d'un quadrilatère

Dans un repère du plan ( $O, I, J$ ) ci - contre, on considère les points  $A(-3; -1)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(9; 5)$  et  $D(2; 4)$ .

- 1) Faire une figure dans un repère orthonormé



- 2) Placer les points A, B, C et D dans le repère ci-contre.  
 3) a) Que peut-on conjecturer sur la nature du quadrilatère ABCD?

ABCD semble être un losange.

- b) En prenant soin de détailler les étapes, démontrer la conjecture de la question précédente.

Soit I le milieu de [AC].

$$x_I = \frac{-3+9}{2} = 3 \text{ et } y_I = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Soit J le milieu de [BD].

$$x_J = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ et } y_J = \frac{0+4}{2} = 2$$

$I(3;2) = J(3;2)$  donc ABCD est un parallélogramme (les diagonales se coupent en leur milieu).

$$AB = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{50} \text{ et } BC = \sqrt{(9 - 4)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{50}$$

$AB = BC$  donc ABCD est un losange (2 côtés consécutifs égaux dans un parallélogramme).

ABCD est donc un losange.

- 4) La perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point D coupe la droite (BC) au point E.  
 Compléter la figure, puis, par lecture graphique, déterminer les coordonnées du point E.

Graphiquement on a  $E(5;1)$

- 5) La droite (ED) coupe la droite (AC) au point M.

- a) Que représente le point M pour le triangle BCD?

Justifier votre réponse.

Comme ABCD est un losange,  $(AC) \perp (BD)$ .  $(AC)$  est donc une hauteur du triangle BDC (la hauteur issue de C).  $(DE)$  est également une hauteur du triangle BDC (la hauteur issue de D).

M est donc le point d'intersection des hauteurs du triangle BDC. c'est donc l'orthocentre du triangle.

- b) Montrer que les droites (BM) et (DC) sont perpendiculaires.

$(BM)$  passe par l'orthocentre du triangle et un sommet du triangle. Il s'agit donc de la hauteur issue de B du triangle BDC. Or une hauteur coupe perpendiculairement le côté opposé au côté dont elle est issue. Donc  $(BM) \perp (DC)$

**Exercice 3** Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur  $\vec{v}$  sont  $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ , celles du point A(1; -2).

Calculer les coordonnées du point C tel que  $\overrightarrow{CA} = \vec{v}$ .

$$\overrightarrow{CA} = \vec{v} \iff \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_C = -x_A - 4 = 1 - 4 = -3 \\ y_C = y_A - (-5) = -2 + 5 = 3 \end{cases}$$

**Exercice 4** Dans le plan muni d'un repère, on considère les points K(-2; -3), L(3; -4) et M(-1; 5). Quelles sont les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}$ ?

#### 1ère méthode : avec la relation de Chasles

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x_M - x_K \\ y_M - y_K \end{pmatrix} = \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 5 - (-3) \end{pmatrix} = \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

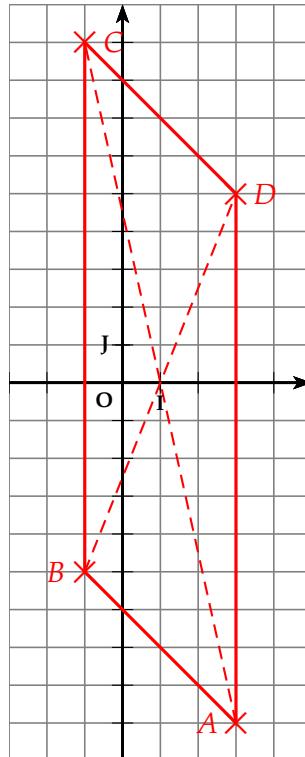
#### 2ème méthode : avec les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} x_L - x_K \\ y_L - y_K \end{pmatrix} + \overrightarrow{LM} \begin{pmatrix} x_M - x_L \\ y_M - y_L \end{pmatrix} = \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ -4 - (-3) \end{pmatrix} + \overrightarrow{LM} \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 5 - (-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \overrightarrow{LM} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Donc  $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \overrightarrow{LM} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} 5 + (-4) \\ -1 + 9 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

**Exercice 5** Construire un repère  $(O; I, J)$  orthogonal.

- 1) Placer les points  $A(3; -9)$  et  $B(-1; -5)$ .
- 2) Placer les points  $C$  et  $D$  tels que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme de centre  $I$ .



- 3) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.

a)  $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ -5 - (-9) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)  $\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c)  $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 5 - (-9) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6** Dans un repère, on considère les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(3; -4)$  et  $(-1; 2)$ . Quelles sont les coordonnées de  $C$  tel que  $\overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{AC}$ ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = -5\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -5\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - 3 \\ y_C - (-4) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -5(x_C - 3) \\ 6 = -5(y_C + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -5x_C + 15 \\ 6 = -5y_C - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{19}{5} \\ y_C = -\frac{26}{5} \end{cases} \text{ D'où } C \left( \frac{19}{5}; -\frac{26}{5} \right)$$

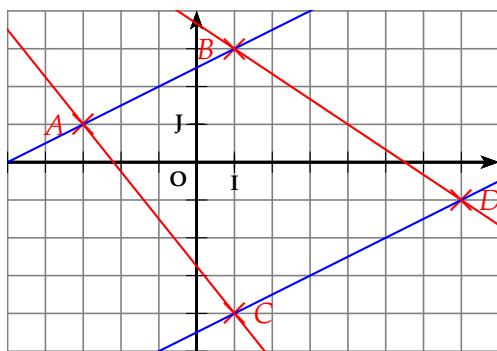
**Exercice 7** Dans un repère, on considère les points suivants :  $A \left( \frac{2}{9}; \frac{6}{25} \right)$  et  $B \left( -\frac{5}{6}; \frac{9}{20} \right)$ .

Calculer les coordonnées de  $C$  tel que  $\overrightarrow{AC} = \frac{15}{2} \overrightarrow{AB}$ .

$$\begin{aligned} \frac{15}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \frac{15}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -\frac{19}{18} \\ \frac{21}{100} \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - \frac{2}{9} \\ y_C - \frac{(6)}{25} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{2} \times -\frac{19}{18} = x_C - \frac{2}{9} \\ \frac{15}{2} \times \frac{21}{100} = y_C - \frac{(6)}{25} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{95}{12} + \frac{2}{9} = x_C \\ \frac{63}{40} + \frac{(6)}{25} = y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -\frac{277}{36} \\ y_C = \frac{363}{200} \end{cases} \text{ D'où } C \left( -\frac{277}{36}; \frac{363}{200} \right) \end{aligned}$$

**Exercice 8** Dans un repère orthogonal, placer les points :

- $A(-3; 1)$
- $B(1; 3)$
- $C(1, -4)$
- $D(7; -1)$



Les droites suivantes sont-elles parallèles ?

- 1)  $(AB)$  et  $(CD)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} &= \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ -1 - (-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 1,5 \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les 2 vecteurs sont colinéaires. les droites sont donc parallèles.

- 2)  $(AC)$  et  $(BD)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ -4 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix} &= \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) &= 4 \times (-4) - 6 \times (-5) = 14 \neq 0 \end{aligned}$$

Les 2 vecteurs ne sont pas colinéaires. les droites ne sont donc pas parallèles.

**Exercice 9** Dans un plan muni d'un repère, on place les points  $A(1; -2)$ ,  $B(-3; 1)$ ,  $C(-17; 15)$  et  $D(-5; 6)$ . Montrer que  $ABCD$  est un trapèze.

On calcule les 4 vecteurs  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{DA}$ .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -17 - (-3) \\ 15 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -5 - (-17) \\ 6 - 15 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} x_A - x_D \\ y_A - y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} 1 - (-5) \\ -2 - 6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires car  $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$  donc les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles. ABCD est donc bien un trapèze.

**Exercice 10 - Sommes algébriques sans grille** Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points quelconques.

1) Démontrer les égalités suivantes.

a)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{DA}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{DA} \end{aligned}$$

b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

2) Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.

a)  $\vec{u} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{BB} = \vec{0} \end{aligned}$$

b)  $\vec{v} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{AA} = \vec{0} \end{aligned}$$

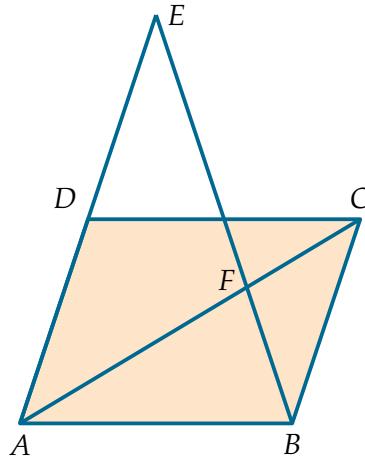
**Exercice 11 - Alignement**

On considère un parallélogramme  $ABCD$  et les points  $E$  et  $F$  définis par :

- $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$

- $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure.



2) Que peut-on conjecturer sur les points  $B, F$  et  $E$ ?

Les points  $B, F$  et  $E$  semblent alignés.

On choisit  $(A; D, B)$  comme repère.

3) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) En déduire les coordonnées du point  $C$ .

$A$  étant l'origine du repère,  $\overrightarrow{AC}$  et  $C$  ont les mêmes coordonnées, donc  $C(1; 1)$ .

5) Quelles sont les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AF}$ ?

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6) En déduire les coordonnées du point  $F$ .

$A$  étant l'origine du repère,  $\overrightarrow{AF}$  et  $F$  ont les mêmes coordonnées, donc  $F\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

7) Calculer les coordonnées du point  $E$ .

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$   $A$  étant l'origine du repère,  $\overrightarrow{AE}$  et  $E$  ont les mêmes coordonnées, donc  $C(0; 2)$ .

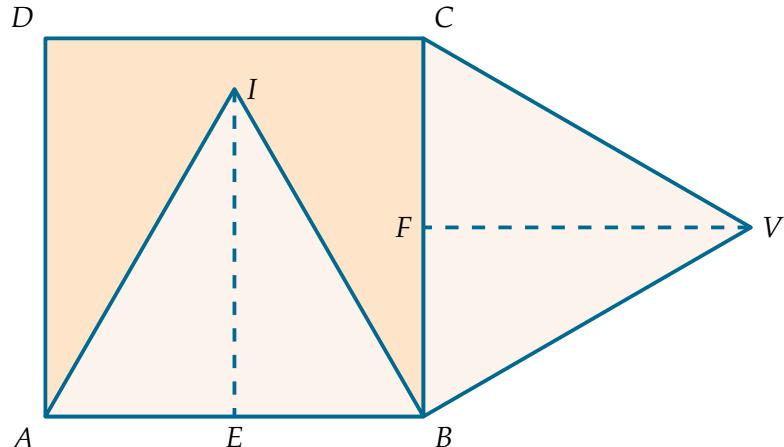
8) Démontrer que  $\overrightarrow{BE}$  et  $\overrightarrow{BF}$  sont colinéaires. Conclure.

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} x_F - x_B \\ y_F - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 1 \\ \frac{2}{3} - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ . On voit que  $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BF}$ . Les 2 vecteurs sont colinéaires et ont un point en commun (le point  $B$ ), donc les points  $B, E$  et  $F$  sont alignés.

**Exercice 12 - Un classique** Sur la figure ci-dessous, on considère le carré  $ABCD$  de côté 5 cm et les triangles équilatéraux  $ABI$  et  $BCV$ .

- 1) Construire la figure en vraie grandeur.



On se place dans le repère  $(A; B, D)$ .

- 2) Calculer les coordonnées des points  $I$  et  $V$ .

Pour calculer les coordonnées, on a besoin de la hauteur des triangles équilatéraux. On va donc calculer  $IE$  (ou  $VF$ ) à l'aide de Pythagore dans le triangle rectangle  $AEI$  (ou  $BVF$ ).

$$IE^2 = IA^2 - AE^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \text{ d'où } IE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{AI} = \vec{AE} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{EI} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \vec{AI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

$A$  étant l'origine du repère,  $\vec{AI}$  et  $I$  ont les mêmes coordonnées, donc  $I \left( \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ .

$$\vec{AV} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{BF} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \vec{FV} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{AV} \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$A$  étant l'origine du repère,  $\vec{AV}$  et  $V$  ont les mêmes coordonnées, donc  $V \left( \frac{2+\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$ .

- 3) Démontrer que les points  $D$ ,  $I$  et  $V$  sont alignés.

$$\vec{DV} \begin{pmatrix} x_V - x_D \\ y_V - y_D \end{pmatrix} = \vec{DV} \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{DV} \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{DI} \begin{pmatrix} x_I - x_D \\ y_I - y_D \end{pmatrix} = \vec{DI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{DI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{pmatrix}.$$

On voit que  $\vec{DV} = (2 + \sqrt{3}) \times \vec{DI}$ .

Les 2 vecteurs sont colinéaires et ont un point en commun (le point  $D$ ), donc les points  $D, I$  et  $V$  sont alignés.