Vecteurs
Rappels de cours

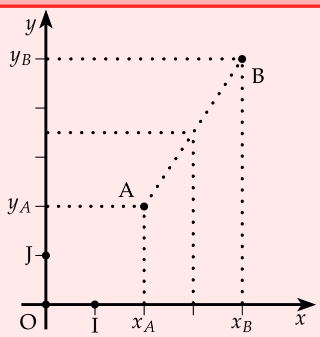
I. géométrie dans un repère

1) Milieu d'un segment

Propriété

Dans un repère **quelconque** du plan : Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$:

le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.



Méthode - Milieu et parallélogramme

Rappel : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Pour montrer qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme, on montre que les 2 diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu :

1) On détermine les coordonnées du milieu M de la diagonale [AC].
2) On détermine les coordonnées du milieu N de la diagonale [BD].
3) On montre que les points M et N sont confondus et on conclut.

Pour trouver le 4ème point D d'un parallélogramme ABCD :

1) On détermine le milieu M de la diagonale [AC].
2) On détermine le point D tel que M soit milieu de la diagonale [BD].

Exemple : : Dans le repère (O;I;J), on veut déterminer les coordonnées de M milieu de [AB] et N milieu de [AC].
Les coordonnées de A, B et C sont : A(1 ; 4) B(5 ; 2) C(-2 ; -2)

Les coordonnées de M milieu de [AB] sont :

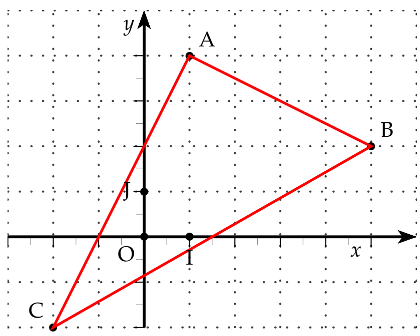
$x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ donc M(3 ; 3).

Les coordonnées de N milieu de [AC] sont :

$x_N = \dfrac{x_A+x_C}{2} = \dfrac{1+(-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$

$y_N = \dfrac{y_A+y_C}{2} = \dfrac{4+(-2)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc N($-0,5$; 1).



On peut le vérifier graphiquement en traçant les segments et leur milieu.

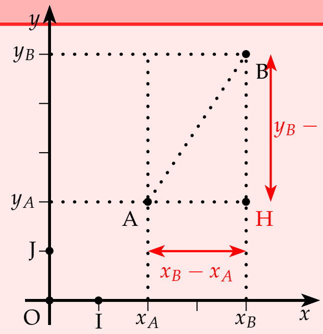
2) Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété

Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un **repère orthonormé** :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Attention : cette formule est valable uniquement si le repère est orthonormé.



Exemple : : Les coordonnées de A, B et C sont : A(1 ; 4) B(5 ; 2) C(−2 ; −2).

- Calculons les longueurs AB, AC et BC. Le repère (O,I,J) ci-dessus est orthonormé donc on peut utiliser la formule ci-dessus :

  AB $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

  AC $= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

  BC $= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$
- Que peut-on dire du triangle ABC ?
  Il semble que ABC soit un triangle rectangle en A. **Prouvons-le :**

  $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{45})^2 = 20 + 45 = 65$ et $BC^2 = (\sqrt{65})^2 = 65.$
  Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A

II. Généralités sur les vecteurs

1) Vecteur et translation

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un outil mathématique qui matérialise la translation d'un point à un autre point. Il est défini par 3 caractéristiques :

- sa direction (son inclinaison)
- son sens (droite, gauche, haut, bas etc)
- sa norme (sa longueur) notée $\|\overrightarrow{AB}\|$

Remarque **Vecteur nul :** le vecteur qui matérialise la translation du point A au point A, c'està-dire sur lui-même, est noté $\vec{0}$ et s'appelle le vecteur nul. On a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Ce vecteur n'a ni direction ni sens, et a pour norme 0.

Définition

vecteurs égaux : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- la même direction
- le même sens
- la même norme

Définition

vecteurs opposés : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits opposés s'ils ont :

- La même direction
- La même norme

MAIS des sens opposés On note $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$

Propriété

Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: c'est-à-dire qu'il part de B pour aller vers A. On a donc : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ou encore $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

III. Opérations sur les vecteurs

1) Règle du parallélogramme

Propriété

Propriété : ABCD est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

2) Somme de vecteurs et relation de Chasles

Définition

somme de vecteurs : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. On définit la somme $\vec{u} + \vec{v}$ comme un vecteur formé en mettant bout à bout les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété

Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Exemple :

1) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$
2) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$
3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
4) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
5) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$
6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

3) Multiplication par un réel

Propriété

On peut factoriser ou développer par un réel avec des vecteurs.

Exemples :

1) $4(\vec{u}+\vec{v}) = 4\vec{u}+4\vec{v}$
2) $4(2\vec{u}) = 8\vec{u}$
3) $5(2\vec{u}+3\vec{v}) = 10\vec{u}+15\vec{v}$

4) colinéarité de vecteurs

Définition

notion de colinéarité : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'ils ont la même direction quel que soit leurs sens et leurs normes. Dans ce cas, il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Propriété

Parallélisme et alignement : Soient les points A, BC et D du plan.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire que $(AB)//(CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à dire que A, B et C sont alignés

Propriété

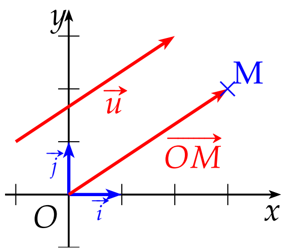
milieux : Soient A et B deux points du plan. I est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

IV. Coordonnées de vecteurs dans un repère

Définition

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$, un repère du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère sont alors celles du point M.

Si un point M a pour coordonnées $(x_M;y_M)$ alors on note $\vec{u}\,(x_M;y_M)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$



Propriété

égalité de vecteurs Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors : $\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$

1) Opérations sur les vecteurs

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors :

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$
- $k\vec{u}\begin{pmatrix}k\,x_1\\k\,y_1\end{pmatrix}$

Méthode - Utiliser les opérations sur les vecteurs

Enoncé :
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$
Solution :
Les coordonnées de $\vec{w}$ sont : $3\times\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}6-(-6)\\-14-8\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}12\\-22\end{pmatrix}$

2) Calcul des coordonnées d'un vecteur

Propriété

Dans un repère, soient A et B deux points de coordonnées A $(\mathrm{x_A};\mathrm{y_A})$ et B $(\mathrm{x_B};\mathrm{y_B})$.
alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Méthode - Coordonnées d'un vecteur

Enoncé :
Soient $A(-1;-5)$ et B$(2;3)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
Solution :
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont données par : $x_B-x_A=2-(-1)=3$ et $y_B-y_A=3-(-5)=8$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$.
Pour le vérifier, faire une figure, et vérifier qu'on se déplace bien horizontalement de 3 carreaux vers la droite puis verticalement de 8 carreaux vers le haut afin d'aller du point A au point B.

V. Colinéarité de vecteurs dans un repère

1) Critère de colinéarité

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors ces 2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles, soit $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

Méthode - Montrer que 2 vecteurs sont colinéaires

Enoncé :

1) Est-ce que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

2) Est-ce que les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Solution :

1) Puisque $(-5)\times(-9) - 3\times 15 = 45 - 45 = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) Puisque $7\times(-2) - (-3)\times 4 = -14 + 12 = -2$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Méthode - Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant

Enoncé : Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix}$

Solution :

1) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}-6 & 9\\ 10 & -15\end{vmatrix} = (-6)\times(-15) - 10\times 9 = 90 - 90 = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & 11\\ 9 & 23\end{vmatrix} = 4\times 23 - 9\times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

3) Application de la colinéarité

Méthode - Appliquer la colinéarité

Enoncé : On considère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(-1\,;1)$, $B(3\,;2)$, $C(-2\,;-3)$, $D(6\,;-1)$, $E(5\,;0)$, 5 points du plan.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Solution :

1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.
On remarque que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles, et on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2) $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\det(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\times(-1) - 2\times 1 = 0$
Les coordonnées de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
Les points E, B et D sont donc alignés.