

Chapitre 4

Vecteurs - partie 1

I. Définitions et propriété

1) Norme d'un vecteur

Définition

Soit un vecteur \vec{u} et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB .

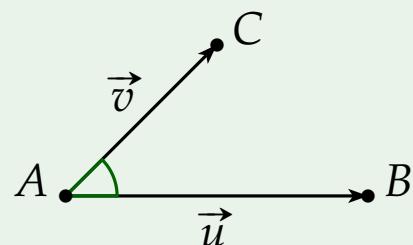
2) Produit scalaire

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$



Remarques

☞ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit \vec{u} scalaire \vec{v}

☞ Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux représentants des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

☞ **Attention** : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

Méthode - calculer un produit scalaire

Enoncé : Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sachant que $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

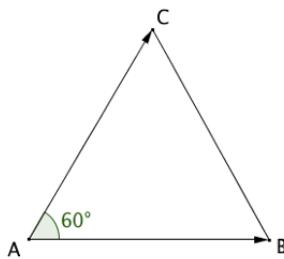
Réponse :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 4\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$$

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Enoncé :

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a . Calculer, en fonction de a , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Réponse :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC} \\
 &= a \times a \times \cos 60^\circ \\
 &= a^2 \times 0,5 \\
 &= \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

⚙ Propriété

Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

✍ Démonstration

On suppose que \vec{u} et \vec{v} sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\
 &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\
 &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v}; \vec{u})) \\
 &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}
 \end{aligned}$$

4) opérations sur les produits scalaires

⚙ Propriété

Pour tout vecteur \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} , on a :

- 1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- 2) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$, avec k un nombre réel.

5) Identités remarquables

⚙ Propriété

Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a :

- 1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- 2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

3) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration - 2ème formule :

$$\begin{aligned}(\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) \\&= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\&= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

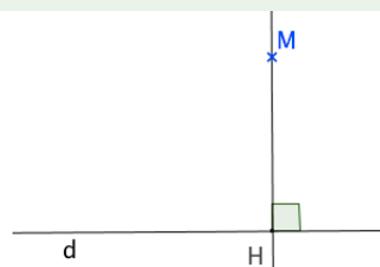
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\&\Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\&\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}\end{aligned}$$

2) Projection orthogonale

Définition

Soit une droite d et un point M du plan.

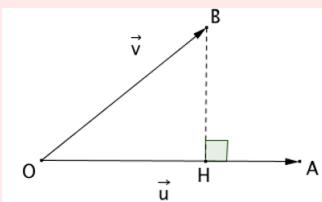
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA). On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



Démonstration

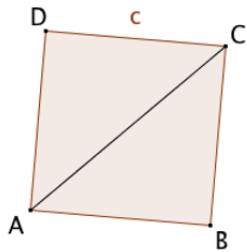
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}\end{aligned}$$

En effet, les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{HB} sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode - Calculer un produit scalaire par projection

Enoncé :

Soit un carré ABCD de côté c . Calculer, en fonction de c , les produits scalaires :



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

Réponse :

1) Par projection, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont orthogonaux.

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$

III. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
 &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} \\
 &= xx' \|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \|\vec{j}\|^2 \\
 &= xx' + yy'
 \end{aligned}$$

car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, le repère étant normé, et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, le repère étant orthogonal.

Méthode - Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Enoncé :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

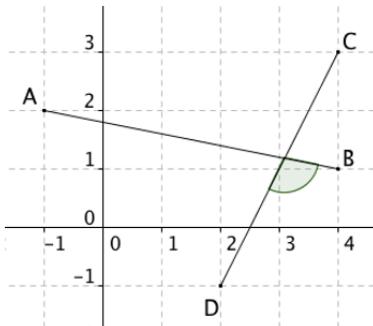
Réponse :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$$

Méthode - Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Enoncé :

Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



Réponse :

On a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \\
 &= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (2 - 1)^2} \times \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \\
 &= \sqrt{520} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \\
 &= 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})
 \end{aligned}$$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5; -1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2; -4)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -6$

On a ainsi : $2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = -6$

$$\text{Et donc : } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$$

Et : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \approx 105,3^\circ$