

Correction - DS n°3

Équations du second degré - Sujet A

Exercice 1 - Équations - (1,5 points)

Déterminer les racines des fonctions polynômes du second degré.

1) $\Leftrightarrow f(x) = 3(x + 7)(-x + 11)$ 0,5

$$x + 7 = 0 \text{ et } -x + 11 = 0 \iff x_1 = -7 \text{ et } x_2 = 11$$

2) $g(x) = x(x - 45)$ 0,5

$$x = 0 \text{ et } x - 45 = 0 \iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 45$$

3) $h(x) = -4(x + 6)(x - 501)$ 0,5

$$x + 6 = 0 \text{ et } x - 501 = 0 \iff x_1 = -6 \text{ et } x_2 = 501$$

Exercice 2 - Factorisation - (5,5 points)

Donner les racines du polynôme du second degré donné, puis le factoriser

1) $A(x) = x^2 + 6x + 9$ 1

$$A(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(Identité remarquable)

3) $C(x) = x^2 + 18x + 77$ 1,5

$$C(x) = x^2 + 18x + 77$$

$$\Delta = 18^2 - 4 \times 77 = 16$$

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{16}}{2} = -11$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-18 + \sqrt{16}}{2} = -7$$

$$C(x) = (x + 11)(x + 7)$$

2) $\Leftrightarrow B(x) = -x^2 + 2x + 15$ 1,5

$$B(x) = -x^2 + 2x + 15$$

$$\Delta = 4 + 4 \times 15 = 64$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = 5$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = -3$$

$$B(x) = -(x + 3)(x - 5)$$

4) $D(x) = 2x^2 - 7x + 8$ 1,5

$$D(x) = 2x^2 - 7x + 8$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 8 = -15$$

Pas de racines et factorisation impossible.

Exercice 3 - Inéquations - (5,5 points)

Résoudre les inéquations données.

1) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} > 0$ 1,5

$$\Delta = 0 \text{ et } x_0 = \frac{1}{4} \text{ et } a > 0 \text{ donc}$$

$$S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

2) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 \leqslant 0$ 1

$$\Delta = -11 \text{ et } a > 0$$

$$S = \emptyset$$

3) $6x^2 + 7x - 3 \geqslant 0$ 1,5

$$\Delta = 121$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

$$S = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[$$

4) $49x^2 - 4 \geqslant 0$ 1,5

$$\iff (7x - 2)(7x + 2) \geqslant 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

$$S = \left] -\infty; -\frac{2}{7} \right] \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty \right[$$

Exercice 4 - Tableau de variations - (2 points)

Pour la fonction polynôme du second degré ci-dessous, dresser son tableau de variations (les valeurs du tableau de variations doivent être justifiées).

$$f(x) = -6x^2 + 24x - 30$$

On a $a = -6 < 0$, $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{12} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = -6 \times 2^2 + 24 \times 2 - 30 = -6$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f		-6	

Exercice 5 - Somme et Produit de racines - (2 points)

Pour chaque équation, déterminer une solution évidente et en déduire l'autre sans calculer le discriminant.

1) $3x^2 - 4x - 7 = 0$ 1

2) $-2x^2 + 14x - 20 = 0$ 1

1) $x_1 = -1$, d'où $S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$
 $x_2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$

2) $x_1 = 2$, d'où $S = -\frac{b}{a} = 7$
 $x_2 = 7 - 2 = 5$

Exercice 6 - Problème - (4 points)

Une athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$. La hauteur $h(t)$, en mètre, à l'instant t , en seconde, du centre de gravité est :

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2$$

La hauteur est mesurée à partir du sol.

- 1) À quel instant le javelot est-il au plus haut et quelle est la hauteur maximale ? (1)

On cherche α et β :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2 \times (-0,5)} = 8 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{1}{2} \times 8^2 + 8 \times 8 + 2 = 34$$

Au bout de 8 secondes, le javelot atteint une hauteur de 34m.

- 2) Pendant combien de temps le javelot est-il au-dessus de 32m? (2)

on résout l'inéquation : $h(t) \geqslant 32 \iff -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2 \geqslant 32 \iff -\frac{1}{2}t^2 + 8t - 30 \geqslant 0$

$$\Delta = 64 - 4 \times \frac{1}{2} \times 30 = 4$$

$$t_1 = \frac{-8 - \sqrt{4}}{2 \times (-0,5)} = 10$$

$$\text{et } t_2 = \frac{-8 + \sqrt{4}}{2 \times (-0,5)} = 6$$

Le javelot sera au-dessus de 32m pendant $x_1 - x_2 = 4$ secondes.

- 3) Au bout de combien de temps le javelot touchera-t-il le sol ? (À quel instant le javelot touchera-t-il le sol?) (1)

on résout l'équation $h(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2 = 0 \quad \Delta = 64 - 4 \times \frac{-1}{2} \times 2 = 68$$

$$t_1 = \frac{-8 - \sqrt{68}}{2 \times (-0,5)} = 8 - 2\sqrt{17} \approx -0,246$$

$$\text{et } t_2 = \frac{-8 + \sqrt{68}}{2 \times (-0,5)} = 8 + 2\sqrt{17} \approx 16,246$$

Le javelot touchera donc le sol au bout de 16,2 secondes environ.