Chapitre 4

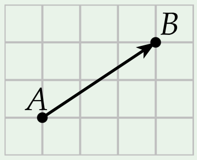
Notion de Vecteurs

I. Notion de vecteur

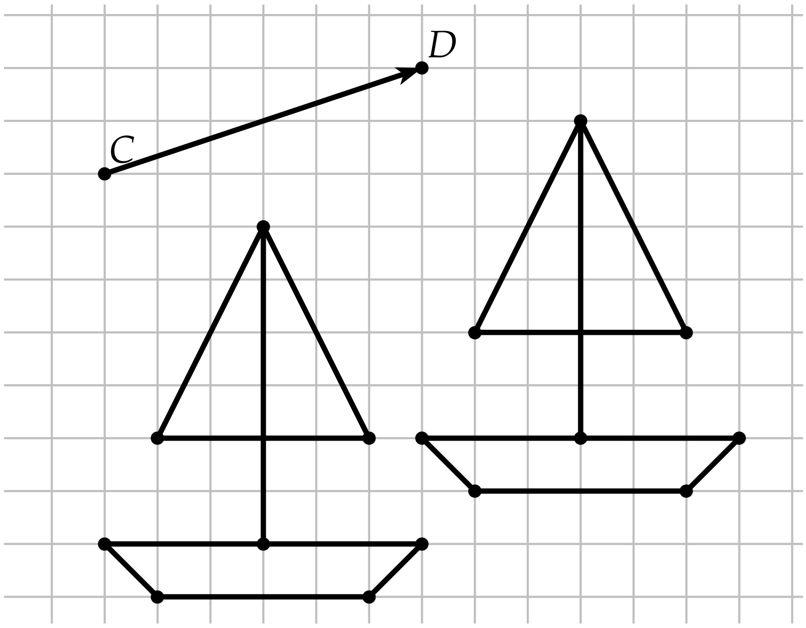
1) Vecteur et translation

Définition

la translation qui transforme A en B est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut aussi noter ce vecteur $\vec{u}$ (en minuscule).



Exemple : Dessiner l'image du bateau par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$

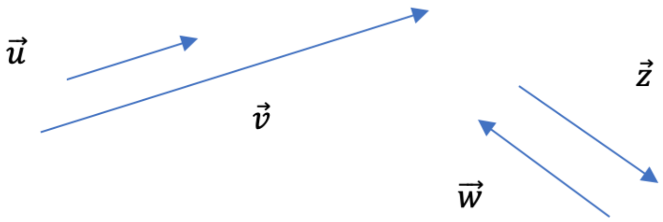


Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un outil mathématique qui matérialise la translation d'un point à un autre point. Il est défini par 3 caractéristiques :

- sa direction (son inclinaison)
- son sens (droite, gauche, haut, bas etc)
- sa norme (sa longueur) notée $||\overrightarrow{AB}||$

Exemple :



- Les vecteurs qui ont la même direction sont : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi que $\vec{w}$ et $\vec{z}$
- Les vecteurs qui ont le même sens sont : $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- Les vecteurs qui ont la même norme sont : $\vec{w}$ et $\vec{z}$

Remarque - Vecteur nul le vecteur qui matérialise la translation du point A au point A, c'està-dire sur lui-même, est noté $\overrightarrow{0}$ et s'appelle le vecteur nul. On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Ce vecteur n'a ni direction ni sens, et a pour norme 0.

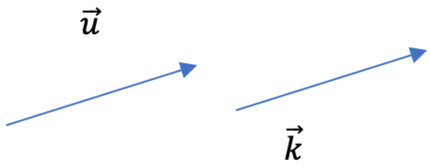
2) Vecteurs égaux

Définition

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- la même direction
- le même sens
- la même norme

Exemple :



On note $\vec{u} = \vec{k}$

Remarque On a alors une infinité de représentations d'un vecteur $\vec{u}$. Pour en choisir un en particulier, il suffit de choisir un point du plan pour origine du vecteur. Par exemple, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine A. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ avec A l'origine de la flèche et B l'extrémité.

3) Vecteurs opposés

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits opposés s'ils ont :

- La même direction
- La même norme

MAIS des sens opposés On note $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$

Exemple : Dans l'exemple du 1) on a $\vec{w} = -\vec{z}$(ou $\vec{z} = -\vec{w}$)

Propriété

Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: c'est-à-dire qu'il part de B pour aller vers A. On a donc : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ou encore $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

II. Opérations sur les vecteurs

1) Règle du parallélogramme

Propriété

Propriété : ABCD est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Démonstration

- On suppose que ABCD est un parallélogramme.
  Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire que ces deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même norme.
  ABCD est un parallélogramme, alors on sait que (AB) //(DC). Alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction.
  ABCD est un parallélogramme, alors on sait que ses côtés opposés ont la même longueur. Donc AB = DC c'est-à-dire $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$
  Par convention, on cite dans l'ordre les points ABC et D du parallélogramme ABCD donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le même sens. On a donc bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- Supposons à présent que que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
  Montrons que ABCD est un parallélogramme. On peut montrer que ABCD est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et égaux.
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc on peut affirmer que ces deux vecteurs ont la même direction, donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles ; et la même norme, donc AB = DC.
  ABCD est donc un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et égaux, on peut en conclure que c'est un parallélogramme.

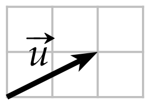
2) Somme de vecteurs et relation de Chasles

Définition

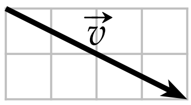
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. On définit la somme $\vec{u}+\vec{v}$ comme un vecteur formé en mettant bout à bout les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple :

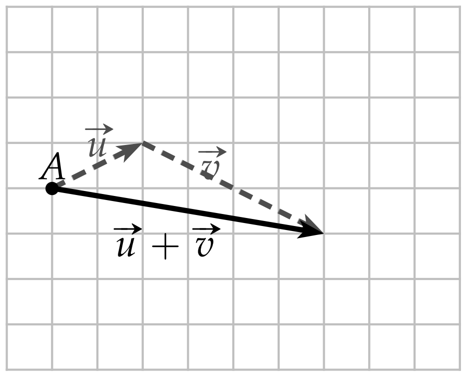
Soient $\vec{u}$:



et $\vec{v}$:



Tracer le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ à partir du point A :



Propriété

Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Exemple :

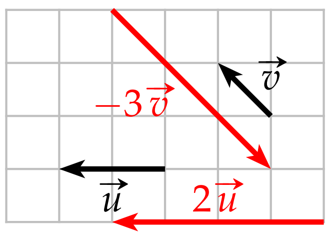
1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$
2) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$
3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$
4) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
5) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$
6) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

3) Multiplication par un réel

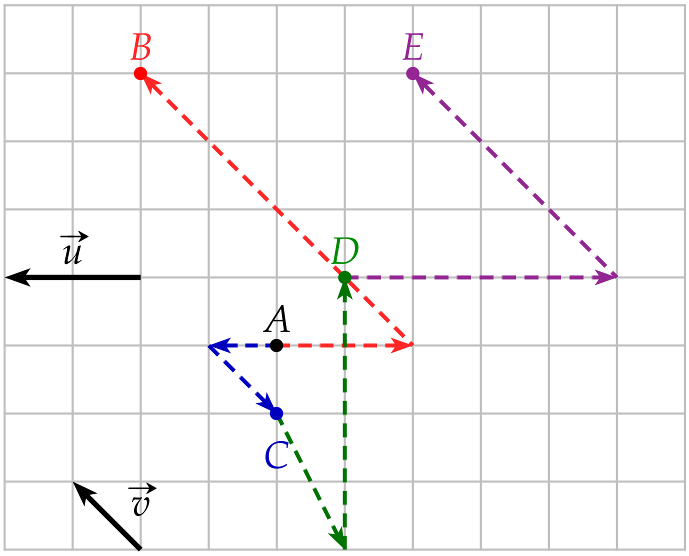
Comme pour les sommes, on peut construire des vecteurs multiples d'un autre vecteur en les mettant pour à bout.

Exemples :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Construire $2\vec{u}$; $-3\vec{v}$



- Soit A un point. Placer les points B, C, D et E tels que :
  - $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + 4\vec{v}$
  - $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$
  - $\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{CA}$
  - $\overrightarrow{ED} = 2\vec{u} - 3\vec{v} \iff \overrightarrow{DE} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$



Propriété

On peut factoriser ou développer par un réel avec des vecteurs.

Exemples :

1) $4(\vec{u} + \vec{v}) = 4\vec{u} + 4\vec{v}$
2) $4(2\vec{u}) = 8\vec{u}$
3) $5(2\vec{u} + 3\vec{v}) = 10\vec{u} + 15\vec{v}$

Remarque Dans le premier exemple précédent, que peut-on dire de la direction des vecteurs $\vec{u}$ et $2\vec{u}$; $\vec{v}$ et $-3\vec{v}$?
On peut voir que les vecteurs $\vec{u}$ et $2\vec{u}$ ont la même direction. Il en est de même pour $\vec{v}$ et $-3\vec{v}$

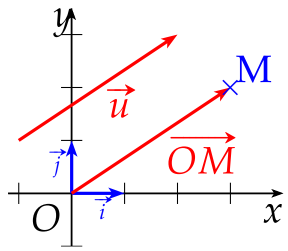
III. Coordonnées de vecteurs

1) Définition

Définition

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un repère du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère sont alors celles du point M.

Si un point M a pour coordonnées $(x_M; y_M)$ alors on note $\vec{u}\,(x_M; y_M)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$

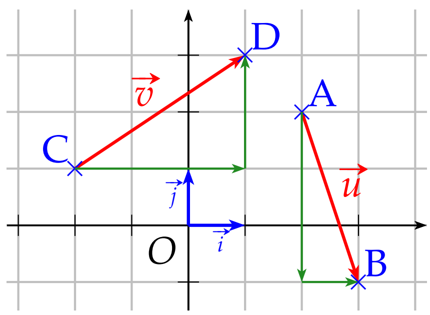


Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors : $\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$

Méthode - Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur

Enoncé :
Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$



Solution :
Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 1 carreau vers la droite $(+1)$ et une translation de 3 carreaux vers le bas (-3). On a donc $\overrightarrow{AB} = 1 \times \vec{i} + (-3) \times \vec{j}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Calcul des coordonnées d'un vecteur

Propriété

Dans un repère, soient A et B deux points de coordonnées $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$.
alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration

La relation de Chasles nous donne :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Comme $-\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-x_A\\-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$, on a alors par addition $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Méthode - Coordonnées d'un vecteur

Enoncé :
Soient $A(-1;-5)$ et B$(2;3)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
Solution :
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont données par : $x_B - x_A = 2-(-1) = 3$ et $y_B - y_A = 3-(-5) = 8$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$.

3) Opérations sur les vecteurs

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ 2 vecteurs. Alors :

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$
- $k\vec{u}\begin{pmatrix}k\,x_1\\k\,y_1\end{pmatrix}$

Méthode - Utiliser les opérations sur les vecteurs

Enoncé :
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$
Solution :
Les coordonnées de $\vec{w}$ sont : $3\times\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix} - 2\times\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$
$\vec{w}\begin{pmatrix}6-(-6)\\-21-8\end{pmatrix} \iff \vec{w}\begin{pmatrix}12\\-29\end{pmatrix}$